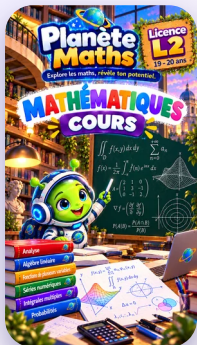


Intégrales généralisées et à paramètre : cours de maths Licence L2 à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 100 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Calculer l'aire sous une courbe qui s'étend jusqu'à l'infini, ou sous une fonction qui explose en un point : les intégrales de Riemann ne suffisent plus. Dans ce chapitre, on donne un sens précis à ces **intégrales généralisées**, on apprend à décider de leur convergence, puis on étudie les intégrales dépendant d'un paramètre, continuité et dérivation sous le signe intégral, jusqu'à la fonction Gamma d'Euler.

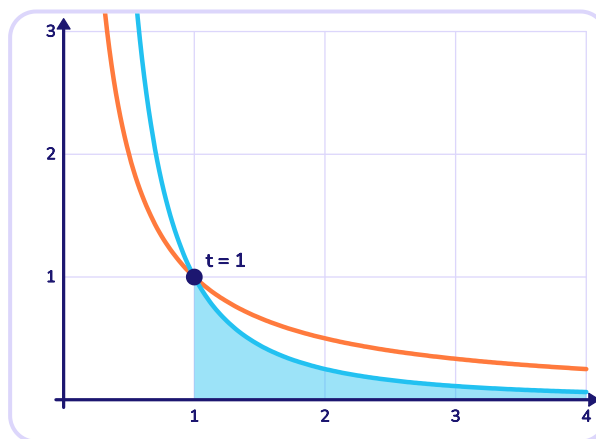
1. Intégrale impropre

D Intégrale impropre

Soit f continue par morceaux sur $[a; b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que $\int_a^b f(t) dt$ **converge** si la limite $\lim_{X \rightarrow b^-} \int_a^X f(t) dt$ existe et est finie ; cette limite est alors la valeur de l'intégrale. Sinon l'intégrale **diverge**. Pour un intervalle ouvert aux deux bouts, on coupe en un point intermédiaire et on exige la convergence de **chaque** morceau.

P Intégrales de Riemann

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$. Pour $\alpha = 1$ les deux divergent, à cause du logarithme.



E**Exemple 1**

Calculons $\int_0^{+\infty} t e^{-2t} dt$. Une primitive de $t e^{-2t}$ est $-\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{-2t}$. Donc

$$\int_0^X t e^{-2t} dt = \frac{1}{4} - \left(\frac{X}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{-2X}, \text{ qui tend vers } \frac{1}{4} \text{ quand } X \rightarrow +\infty.$$

L'intégrale converge et vaut $\frac{1}{4}$.

E**Exemple 2**

Pour $\int_0^1 \ln t dt$: une primitive de $\ln t$ est $t \ln t - t$. Entre ε et 1, on obtient

$$-1 - \varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon, \text{ qui tend vers } -1 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

L'intégrale vaut -1 .

2. Intégrabilité et comparaison

Pour une fonction **positive**, l'intégrale $\int_a^X f$ est croissante en X : elle converge si et seulement si elle reste **majorée**. On dit alors que f est **intégrable** sur l'intervalle.

P**Critères de comparaison**

Soient f, g continues par morceaux et positives sur $[a; b[$.

- Si $f \leq g$ et si g est intégrable, alors f l'est ; si f ne l'est pas, g non plus.
- Si $f(t) \sim_b g(t)$, ou si $f = O(g)$ ou $f = o(g)$ au voisinage de b , les mêmes conclusions valent (avec g intégrable pour O et o).

M**Méthode**

1. Repère les points « dangereux » : les bornes infinies et les points où f n'est pas définie ou explose.
2. À chacun, cherche un équivalent simple de f , de type $\frac{1}{t^\alpha}$ ou e^{-ct} .
3. Conclut avec les intégrales de Riemann ou l'exponentielle, point dangereux par point dangereux.

E**Exemple 3**

Étudions $\int_1^{+\infty} \frac{t+1}{t^3+2} dt$. Quand $t \rightarrow +\infty$, $\frac{t+1}{t^3+2} \sim \frac{1}{t^2}$, et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge ($\alpha = 2 > 1$). Par comparaison de fonctions positives, l'intégrale converge.

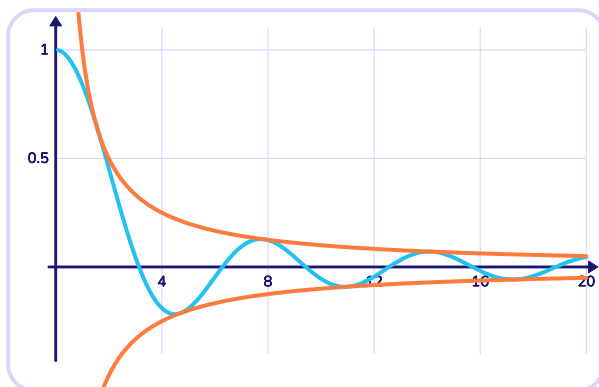
3. Convergence absolue**D****Convergence absolue**

L'intégrale $\int_a^b f$ converge **absolument** si $\int_a^b |f|$ converge, c'est-à-dire si f est intégrable.

P**Théorème**

Une intégrale absolument convergente est convergente, et $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.

La réciproque est fautive. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge : une intégration par parties donne $\int_1^X \frac{\sin t}{t} dt = \cos 1 - \frac{\cos X}{X} - \int_1^X \frac{\cos t}{t^2} dt$, et $\frac{|\cos t|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ est intégrable. Pourtant $\left| \frac{\sin t}{t} \right|$ n'est pas intégrable : l'intégrale est dite **semi-convergente**.



Piège

Pour une fonction de signe quelconque, un équivalent ne suffit pas. Deux fonctions équivalentes en $+\infty$ peuvent avoir des intégrales de natures différentes si elles changent de signe. Les critères de comparaison exigent des fonctions positives.

4. Théorème de convergence dominée



Convergence dominée

Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I . On suppose que (f_n) converge simplement vers une fonction f continue par morceaux, et qu'il existe une fonction φ **intégrable** sur I , indépendante de n , telle que $|f_n| \leq \varphi$ pour tout n . Alors f et les f_n sont intégrables et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \int_I f.$$

E

Exemple 4

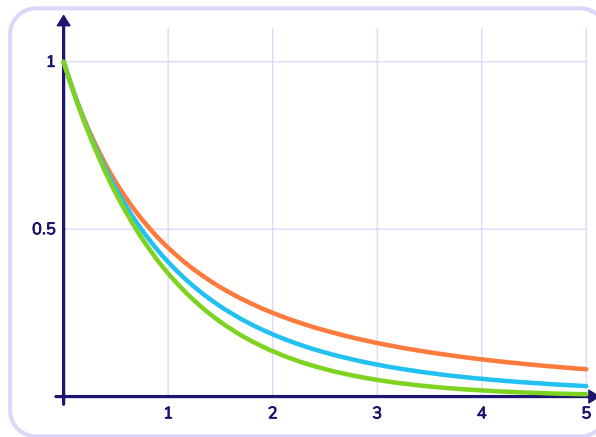
Soit $I_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n} dt$ pour $n \geq 2$. Pour t fixé, $\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n} \rightarrow e^{-t}$. Pour

dominer, la formule du binôme donne

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \geq 1 + t + \frac{n-1}{2n}t^2 \geq \left(1 + \frac{t}{2}\right)^2, \text{ donc}$$

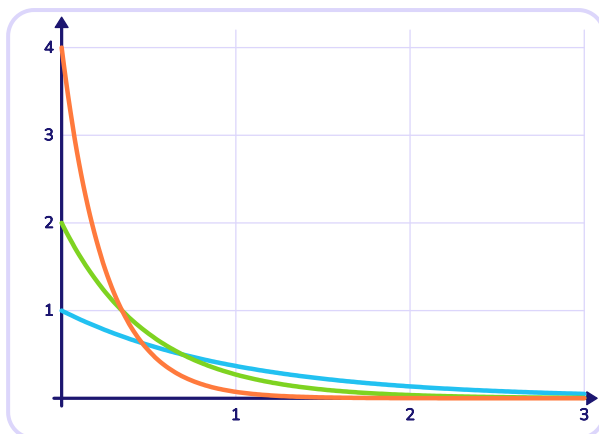
$$0 \leq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n} \leq \left(1 + \frac{t}{2}\right)^{-2}, \text{ intégrable sur } [0; +\infty[. \text{ Par convergence}$$

dominée, $I_n \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$. On le confirme par calcul direct : $I_n = \frac{n}{n-1} \rightarrow 1$.



Piège

L'hypothèse de domination ne se contourne pas. Les fonctions $f_n(t) = n e^{-nt}$ tendent vers 0 pour tout $t > 0$, mais $\int_0^{+\infty} f_n = 1$ pour tout n : on ne peut pas échanger limite et intégrale, car aucune fonction intégrable ne les domine toutes.



5. Intégration terme à terme

P Théorème d'intégration terme à terme

Soit (u_n) une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I , telle que $\sum u_n$ converge simplement vers une fonction S continue par morceaux, et telle que $\sum_n \int_I |u_n|$ converge. Alors S est intégrable et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n.$$

E Exemple 5

Pour $t > 0$, $\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} t e^{-nt}$. Chaque terme est positif et $\int_0^{+\infty} t e^{-nt} dt = \frac{1}{n^2}$ (changement de variable $u = nt$). La série des intégrales converge, donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

6. Continuité d'une intégrale à paramètre

Soit $F(x) = \int_I f(x, t) dt$ pour x dans un intervalle J .

P

Continuité sous le signe intégral

Si pour tout t l'application $x \mapsto f(x, t)$ est continue, si pour tout x l'application $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux, et s'il existe φ intégrable sur I avec $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$ pour tout $x \in J$, alors F est définie et **continue** sur J .

La domination peut se vérifier seulement sur chaque segment de J , ou sur chaque intervalle $[a; +\infty[$ avec $a > 0$: la continuité est une propriété locale.

7. Dérivation sous le signe intégral

P

Règle de Leibniz

Si, pour tout x , $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable, si $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue en x , continue par morceaux en t , et si $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$ avec φ intégrable, alors F est de classe C^1 et

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

E

Exemple 6

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$ pour $x > 0$. Sur $[a; +\infty[$ avec $a > 0$,

$\left| \frac{\partial}{\partial x} \right| = |-\sin t e^{-xt}| \leq e^{-at}$, intégrable. Donc

$F'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin t dt = -\frac{1}{1+x^2}$, d'où $F(x) = C - \arctan x$. Comme $F(x) \rightarrow 0$ en $+\infty$ (domination par e^{-t}), $C = \frac{\pi}{2}$ et $F(1) = \frac{\pi}{4}$.

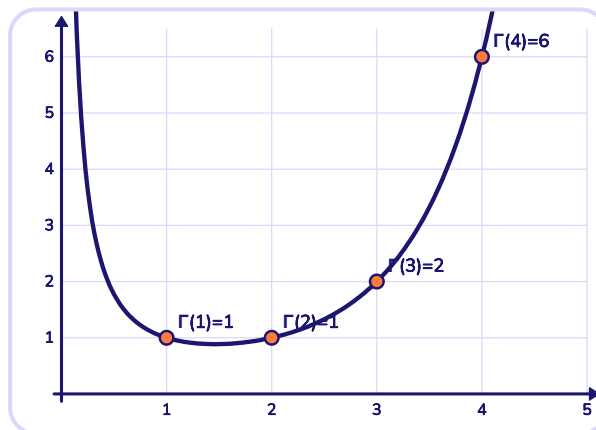
8. La fonction Gamma

D Fonction Gamma d'Euler

Pour $x > 0$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. L'intégrale converge en 0 car $t^{x-1} e^{-t} \sim t^{x-1}$ avec $x - 1 > -1$, et en $+\infty$ car $t^{x-1} e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

P Propriétés

$\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ (intégration par parties), donc $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout entier n . De plus $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, Γ est de classe C^∞ et **convexe** sur $]0; +\infty[$ avec $\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt > 0$.



E Exemple 7

$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$. Et $\int_0^{+\infty} t^3 e^{-2t} dt = \frac{\Gamma(4)}{2^4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ par le changement de variable $u = 2t$.



Astuce de Zyro

Quand tu vois une exponentielle multipliée par une puissance de t sur $[0; +\infty[$, pense Gamma : un changement de variable $u = ct$ ramène presque toujours à $\Gamma(x)$.

À retenir

- Une intégrale impropre converge si la limite de l'intégrale sur un segment qui grandit existe et est finie.
- Riemann : $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, $\int_0^1 t^{-\alpha} dt$ si et seulement si $\alpha < 1$.
- Comparaison et équivalents : uniquement pour des fonctions positives ; la convergence absolue implique la convergence.
- Convergence dominée et terme à terme : toujours vérifier une domination **intégrable** indépendante de n .
- Continuité et dérivation sous $\int$: domination de f , puis de $\partial_x f$, éventuellement sur des segments ou des $[a; +\infty[$.
- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Le livre de cours de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 100 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)



Entraîne-toi : défi express de Licence L2

[Changer de niveau](#)

Niveau : Licence L2

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi



Zyro te conseille la suite



Exercices de maths

Intégrales généralisées et à paramètre :
exercices de maths Licence L2



Contrôles de maths

Intégrales généralisées et à paramètre :
contrôle de maths Licence L2



QCM de maths



Exercices de maths

Intégrales généralisées et à paramètre :
QCM de maths Licence L2

Intégrales doubles et triples : exercices
de maths Licence L2

 Exercices de maths

Équations différentielles : exercices de
maths Licence L2

 Contrôles de maths

Intégrales doubles et triples : contrôle de
maths Licence L2

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage