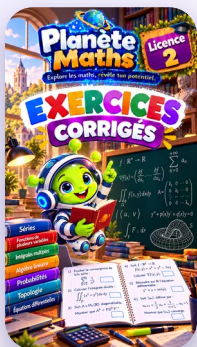


Intégrales généralisées et à paramètre : exercices corrigés de maths Licence L2 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 128 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Une intégrale de Riemann



Pour $X \geq 1$,
$$\int_1^X t^{-3} dt = \left[-\frac{1}{2t^2} \right]_1^X = \frac{1}{2} - \frac{1}{2X^2}.$$

Quand $X \rightarrow +\infty$, ce terme tend vers $\frac{1}{2}$. L'intégrale converge et vaut $\frac{1}{2}$.

2 Une racine à l'origine



Pour $0 < \varepsilon < 1$,
$$\int_{\varepsilon}^1 t^{-1/2} dt = \left[2\sqrt{t} \right]_{\varepsilon}^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$, la limite est **2** : l'intégrale converge et vaut **2** (ici $\alpha = \frac{1}{2} < 1$).

3 Exponentielle décroissante



$$\int_0^X e^{-5t} dt = \left[-\frac{e^{-5t}}{5} \right]_0^X = \frac{1 - e^{-5X}}{5} \rightarrow \frac{1}{5}.$$

L'intégrale converge et vaut $\frac{1}{5}$.

4 Trois intégrales de Riemann



$A : \alpha = \frac{3}{2} > 1$, converge ; $\int_1^X t^{-3/2} dt = 2 - \frac{2}{\sqrt{X}} \rightarrow 2$, donc $A = 2$.

$B : \alpha = \frac{1}{2} \leq 1$ en $+\infty$, diverge ($\int_1^X t^{-1/2} dt = 2\sqrt{X} - 2 \rightarrow +\infty$).

$C : \alpha = \frac{3}{2} \geq 1$ en 0 , diverge.

5 Vrai ou faux



a. Faux : $f(t) = \frac{1}{t}$ tend vers 0 mais $\int_1^X \frac{dt}{t} = \ln X \rightarrow +\infty$.

b. Vrai : c'est le théorème « convergence absolue implique convergence » ; de plus $|\int f| \leq \int |f|$.

6 Valeurs de Gamma



$$\Gamma(5) = 4! = 24.$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{8} \sqrt{\pi} \approx 3,32.$$

7 Deux intégrales avec exponentielle



La première vaut $\Gamma(2) = 1$.

Avec $u = 2t$: $\int_0^{+\infty} t^3 e^{-2t} dt = \frac{1}{2^4} \int_0^{+\infty} u^3 e^{-u} du = \frac{\Gamma(4)}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$

8 Logarithme et intégration par parties



Primitive de $\ln t : t \ln t - t$. Entre ε et 1 : $-1 - \varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon \rightarrow -1$.

Par parties,
$$\int_{\varepsilon}^1 t^3 \ln t \, dt = \left[\frac{t^4}{4} \ln t - \frac{t^4}{16} \right]_{\varepsilon}^1 = -\frac{1}{16} - \frac{\varepsilon^4}{4} \ln \varepsilon + \frac{\varepsilon^4}{16} \rightarrow -\frac{1}{16}.$$

9 Arctangente



$$\int_0^X \frac{dt}{1+t^2} = \arctan X \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

Une primitive de $\frac{1}{t^2+4}$ est $\frac{1}{2} \arctan \frac{t}{2}$. Sur chaque demi-droite on trouve $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$, donc l'intégrale sur $\mathbb{R}$ converge et vaut $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

10 Comparaison et équivalents



Première : fonction positive, équivalente à $\frac{2}{t^2}$ en $+\infty$, intégrable ; l'intégrale converge.

Seconde : en 0, $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$ ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$), intégrable ; en $+\infty$, $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \leq e^{-t}$ pour $t \geq 1$, intégrable. L'intégrale converge, et elle vaut $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

11 Intégrales de Bertrand



Une primitive de $\frac{1}{t \ln t}$ est $\ln(\ln t)$, qui tend vers $+\infty$: la première diverge.

Une primitive de $\frac{1}{t(\ln t)^2}$ est $-\frac{1}{\ln t} : \int_2^X = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln X} \rightarrow \frac{1}{\ln 2}$. La seconde converge et vaut $\frac{1}{\ln 2} \approx 1,44$.

12 Semi-convergence



$\left| \frac{\sin t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$, intégrable : convergence absolue.

Par parties, $\int_1^X \frac{\sin t}{t} dt = \cos 1 - \frac{\cos X}{X} - \int_1^X \frac{\cos t}{t^2} dt$. Le terme $\frac{\cos X}{X} \rightarrow 0$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ converge absolument, donc la limite existe : l'intégrale converge.

13 Convergence dominée simple



Pour t fixé, $\frac{e^{-t}}{1+t/n} \rightarrow e^{-t}$. De plus $0 \leq \frac{e^{-t}}{1+t/n} \leq e^{-t}$, intégrable sur $[0; +\infty[$ et indépendante de n .

Par convergence dominée, $I_n \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.

14 Moments de logarithme



Par parties avec $u = \ln t$, $v' = t^n$: $\int_\varepsilon^1 t^n \ln t dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln t \right]_\varepsilon^1 - \frac{1}{n+1} \int_\varepsilon^1 t^n dt$.

Le crochet vaut $-\frac{\varepsilon^{n+1} \ln \varepsilon}{n+1} \rightarrow 0$, et $\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$. D'où le résultat $-\frac{1}{(n+1)^2}$.

15 Continuité d'une intégrale à paramètre



Pour tout $x \geq 0$ et $t \geq 0$, $0 \leq \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$, intégrable sur $[0; +\infty[$. La fonction $x \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue : F est définie et continue sur $[0; +\infty[$.

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Pour $t > 0$, $e^{-xt} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$; la domination par $\frac{1}{1+t^2}$ reste valable, donc $F(x) \rightarrow 0$.

16 Dérivation sous le signe intégral

★★★★

Fixons $a > 0$ et $x \geq a$: $\left| \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \right) \right| = |\sin t| e^{-xt} \leq e^{-at}$, intégrable. Donc F est C^1 sur $[a; +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur $]0; +\infty[$.

$$F'(x) = - \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin t \, dt = - \frac{1}{1+x^2} \text{ (partie imaginaire de } \frac{1}{x-i} \text{)}.$$

Donc $F(x) = C - \arctan x$. Comme $|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} \, dt = \frac{1}{x} \rightarrow 0$, on a $C = \frac{\pi}{2}$, puis $F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ et $F(1) = \frac{\pi}{4}$.

17 Gamma et intégrale gaussienne

★★★★

Par parties sur $[\varepsilon; X]$: $\int t^x e^{-t} \, dt = [-t^x e^{-t}] + x \int t^{x-1} e^{-t} \, dt$. Le crochet tend vers 0 aux deux bornes, d'où $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

$$\text{Avec } t = u^2 : \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} \, dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \, du = \sqrt{\pi}.$$

$$\text{Pour } u^4 e^{-u^2}, \text{ le changement } t = u^2 \text{ donne } \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{\pi}}{4} = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}.$$

18 Une somme de Basel par intégrale

★★★★

Pour $t \in]0; 1[$, $\frac{-\ln t}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-\ln t) t^n$, termes positifs.

On a $\int_0^1 (-\ln t) t^n \, dt = \frac{1}{(n+1)^2}$ (exercice « Moments de logarithme »), dont la série converge : le théorème d'intégration terme à terme s'applique.

$$\text{Donc } \int_0^1 \frac{-\ln t}{1-t} \, dt = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}, \text{ d'où le résultat.}$$

19 Un contre-exemple de domination

★★★★

$\int_0^{+\infty} ne^{-nt} dt = 1$ pour tout n , alors que pour $t > 0$, $f_n(t) \rightarrow 0$. Donc

$\lim \int f_n = 1 \neq 0 = \int \lim f_n$: on ne peut pas échanger.

Soit φ dominant tous les f_n et $t \in]0; 1]$. Avec $n = \lceil 1/t \rceil$ on a $\frac{1}{t} \leq n \leq \frac{1}{t} + 1 \leq \frac{2}{t}$, donc $nt \leq 2$ et $\varphi(t) \geq ne^{-nt} \geq \frac{e^{-2}}{t}$. Or $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ diverge, donc φ n'est pas intégrable : contradiction.

20 Convexité de Gamma

★★★★

L'intégrande de Γ'' est positif, continu, non identiquement nul : $\Gamma''(x) > 0$. Donc Γ est strictement convexe et Γ' est strictement croissante.

Comme $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, le théorème de Rolle fournit $x_0 \in]1; 2[$ avec $\Gamma'(x_0) = 0$: c'est l'unique point où Γ' s'annule, donc un minimum global.

Écrivons $x_0 = \lambda \cdot 1 + (1 - \lambda) \cdot 2$ avec $\lambda \in]0; 1[$. Par stricte convexité,

$\Gamma(x_0) < \lambda\Gamma(1) + (1 - \lambda)\Gamma(2) = 1$. Numériquement, $x_0 \approx 1,46$ et $\Gamma(x_0) \approx 0,886$.

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 128 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de Licence
L2

Changer de niveau

Niveau : Licence L2

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi



Zyro te conseille la suite



Exercices de maths

Intégrales généralisées et à paramètre :
exercices de maths Licence L2



QCM de maths

Intégrales généralisées et à paramètre :
QCM de maths Licence L2



Contrôles de maths

Intégrales généralisées et à paramètre :
contrôle de maths Licence L2



Exercices de maths

Intégrales doubles et triples : exercices
de maths Licence L2

 Exercices de maths

Équations différentielles : exercices de maths Licence L2

 QCM de maths

Intégrales doubles et triples : QCM de maths Licence L2

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage