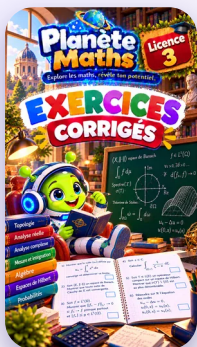


Groupes, anneaux et corps : exercices de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

20 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

1 Ordre d'un élément de $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$

★☆☆

Dans le groupe additif $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$, on considère la classe de 12. Déterminer son ordre et lister les éléments du sous-groupe qu'elle engendre.

2 Vrai ou faux : sous-groupes distingués

★☆☆

Justifier chaque affirmation.

- Tout sous-groupe d'un groupe abélien est distingué.
- Tout sous-groupe d'indice 2 est distingué.
- Le sous-groupe $H = \{\text{id}, (1\ 2)\}$ de S_3 est distingué.

3 Un quotient de $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$



Soit $G = \mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ et $H = \langle 5 \rangle$.

- Donner $|H|$ puis $|G/H|$.
- La classe de 7 est-elle égale à celle de 2 dans G/H ?
- Quel est l'ordre de la classe de 7 dans G/H ?

4 Orbite et stabilisateur



Un groupe G d'ordre 24 agit sur un ensemble. Un point x a une orbite de 8 éléments, un point y a un stabilisateur d'ordre 12. Donner $|G_x|$ et $|G \cdot y|$.

5 Somme et intersection d'idéaux de $\mathbb{Z}$



Déterminer un générateur de l'idéal $(12) + (18)$ et de l'idéal $(12) \cap (18)$.

6 Polynômes de degré 2 ou 3 sur $\mathbb{F}_2$



Dire, en justifiant, lesquels des polynômes $X^2 + 1$, $X^2 + X + 1$ et $X^3 + X + 1$ sont irréductibles dans $\mathbb{F}_2[X]$.

7 Le corps $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$



Soit $a = \sqrt[3]{2}$. Montrer que $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = 3$, donner une base, puis vérifier que $(1 + a)(1 - a + a^2) = 3$ et en déduire l'inverse de $1 + a$.

8 Groupes d'ordre 21



Soit G un groupe d'ordre 21.

- Montrer que G possède un unique sous-groupe d'ordre 7.
- Quelles valeurs peut prendre n_3 ?
- G est-il simple ?

9 Groupes d'ordre 35



Montrer que tout groupe d'ordre 35 est cyclique.

10 Le quotient $\mathbb{Z}[i]/(2+i)$



On définit $\varphi : \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ par $\varphi(a+bi) = a - 2b \pmod{5}$.

- Vérifier que φ est un morphisme d'anneaux surjectif.
- Montrer que $\ker \varphi = (2+i)$.
- Conclure.

11 Calculs dans $\mathbb{F}_4$



Soit $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$ et α la classe de X , de sorte que $\alpha^2 = \alpha + 1$.

- Calculer α^3 .
- Calculer $(\alpha + 1)^2$.
- Déterminer l'inverse de α .

12 Critère d'Eisenstein



Montrer que $P = X^4 + 10X^2 - 15X + 20$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

13 Colorier les sommets d'un carré

★★★

On colorie les 4 sommets d'un carré en noir ou blanc. Deux coloriages sont identiques s'ils se déduisent l'un de l'autre par une rotation (de 0° , 90° , 180° ou 270°). Combien y a-t-il de coloriages distincts ?

14 Inverses dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

★★★

Montrer que $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 2)$ est un corps, noté $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ en posant $\sqrt{2}$ la classe de X .
Calculer les inverses de $1 + \sqrt{2}$ et de $3 + \sqrt{2}$.

15 Groupes d'ordre 12

★★★★

Montrer qu'un groupe G d'ordre 12 possède un sous-groupe de Sylow distingué.

16 Groupes d'ordre 56 non simples

★★★★

Montrer qu'aucun groupe d'ordre 56 n'est simple.

17 Le corps à 9 éléments

★★★★

Soit $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[X]/(X^2 + 1)$ et i la classe de X .

- Justifier que $X^2 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{F}_3$.
- Calculer les puissances $(1 + i)^2$, $(1 + i)^4$ et $(1 + i)^8$.
- En déduire que $1 + i$ engendre $\mathbb{F}_9^\times$.

18 Irréductibilité de $X^4 + 1$

★★★★

Montrer que $X^4 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ en utilisant $P(X + 1)$.

19 L'idéal $(2, X)$ de $\mathbb{Z}[X]$



Soit $I = (2, X) = \{2P + XQ : P, Q \in \mathbb{Z}[X]\}$. Montrer que I n'est pas principal.

20 Compter les polynômes irréductibles de degré 2



Combien y a-t-il de polynômes unitaires irréductibles de degré 2 dans $\mathbb{F}_5[X]$? On pourra compter les polynômes réductibles.

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

Zyro te conseille la suite

Exercices corrigés de maths

Groupes, anneaux et corps : exercices corrigés de maths Licence L3

Cours de maths

Groupes, anneaux et corps : cours de maths Licence L3

 QCM de maths

Groupes, anneaux et corps : QCM de maths Licence L3

 Exercices corrigés de maths

Topologie des espaces métriques : exercices corrigés de maths Licence L3

 Exercices corrigés de maths

Espaces complets et point fixe : exercices corrigés de maths Licence L3

 Cours de maths

Topologie des espaces métriques : cours de maths Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage