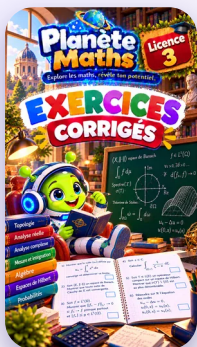


Groupes, anneaux et corps : exercices corrigés de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Ordre d'un élément de $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$

★☆☆

On a $\gcd(12, 18) = 6$, donc l'ordre de la classe de 12 est $18/6 = 3$.

Les multiples sont **12**, $24 \equiv 6$, $36 \equiv 0$. Le sous-groupe engendré est $\{0, 6, 12\}$, de 3 éléments, ce qui confirme l'ordre 3.

2 Vrai ou faux : sous-groupes distingués

★☆☆

a. **Vrai.** Si G est abélien, $ghg^{-1} = hgg^{-1} = h \in H$.

b. **Vrai.** Les classes à gauche sont H et $G \setminus H$, de même que les classes à droite ; donc $gH = Hg$ pour tout g .

c. **Faux.** Avec $\tau = (1\ 3)$, on a $\tau(1\ 2)\tau^{-1} = (\tau(1)\ \tau(2)) = (3\ 2) \notin H$.

3 Un quotient de $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$



- a. $H = \{0, 5, 10, 15\}$, donc $|H| = 4$ et $|G/H| = 20/4 = 5$.
- b. $7 - 2 = 5 \in H$: oui, $7 + H = 2 + H$.
- c. G/H est d'ordre 5 premier, donc tout élément non nul est d'ordre 5 ; la classe de 7 (non nulle car $7 \notin H$) est d'ordre 5. Le quotient est isomorphe à $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

4 Orbite et stabilisateur



Par la formule orbite-stabilisateur, $|G| = |G \cdot x| |G_x|$, donc $|G_x| = 24/8 = 3$.

De même $|G \cdot y| = 24/12 = 2$.

5 Somme et intersection d'idéaux de $\mathbb{Z}$



$(12) + (18)$ est l'ensemble des $12u + 18v$: c'est $(\gcd(12, 18)) = (6)$.

$(12) \cap (18)$ est l'ensemble des multiples communs : c'est $(\text{ppcm}(12, 18)) = (36)$.

6 Polynômes de degré 2 ou 3 sur $\mathbb{F}_2$



$X^2 + 1 = (X + 1)^2$ car $2X = 0$: réductible (il a la racine 1).

$X^2 + X + 1$ vaut 1 en 0 et $1 + 1 + 1 = 1$ en 1 : pas de racine, degré 2, donc irréductible.

$X^3 + X + 1$ vaut 1 en 0 et 1 en 1 : pas de racine, degré 3, donc irréductible.

7 Le corps $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$



$X^3 - 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ (Eisenstein avec $p = 2$) : c'est le polynôme minimal de a , donc le degré vaut 3 et $(1, a, a^2)$ est une base.

$$(1 + a)(1 - a + a^2) = 1 - a + a^2 + a - a^2 + a^3 = 1 + a^3 = 3.$$

$$\text{Donc } (1 + a)^{-1} = \frac{1 - a + a^2}{3}.$$

8 Groupes d'ordre 21



- a. $21 = 7 \times 3$. On a $n_7 \mid 3$ et $n_7 \equiv 1 \pmod{7}$, donc $n_7 = 1$.
- b. $n_3 \mid 7$ et $n_3 \equiv 1 \pmod{3}$: les diviseurs de 7 sont 1 et 7, tous deux congrus à 1 modulo 3. Donc $n_3 \in \{1, 7\}$.
- c. Le Sylow d'ordre 7 est unique, donc distingué, propre et non trivial : G n'est pas simple.

9 Groupes d'ordre 35



$35 = 5 \times 7$. On a $n_5 \mid 7$ et $n_5 \equiv 1 \pmod{5}$: les diviseurs de 7 sont 1 et 7 et $7 \equiv 2 \pmod{5}$, donc $n_5 = 1$. De même $n_7 \mid 5$, $n_7 \equiv 1 \pmod{7}$ donne $n_7 = 1$.

Les sous-groupes P (ordre 5) et Q (ordre 7) sont distingués et $P \cap Q = \{e\}$ (leurs ordres sont premiers entre eux), donc $G \cong P \times Q \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$ par le lemme chinois : G est cyclique.

10 Le quotient $\mathbb{Z}[i]/(2+i)$



- a. φ est additif. Pour la multiplication : $(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$ est envoyé sur $ac-bd-2ad-2bc$, et
- $$(a-2b)(c-2d) = ac-2ad-2bc+4bd \equiv ac-2ad-2bc-bd \text{ modulo } 5 \text{ car } 4 \equiv -1 : \text{ les deux coïncident. Enfin } \varphi(1) = 1 \text{ et } \varphi(a) = a \text{ pour } a \in \mathbb{Z} : \text{ surjectif.}$$
- b. $\varphi(2+i) = 2-2 = 0$, donc $(2+i) \subset \ker \varphi$. Réciproquement, si $a \equiv 2b \pmod{5}$, alors $\frac{a+bi}{2+i} = \frac{(a+bi)(2-i)}{5} = \frac{(2a+b) + (2b-a)i}{5}$, avec $2a+b \equiv 5b \equiv 0$ et $2b-a \equiv 0$ modulo 5 : le quotient est dans $\mathbb{Z}[i]$.
- c. Par le théorème d'isomorphisme, $\mathbb{Z}[i]/(2+i) \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$: c'est un corps à 5 éléments.

11 Calculs dans $\mathbb{F}_4$



- a. $\alpha^3 = \alpha \cdot \alpha^2 = \alpha(\alpha+1) = \alpha^2 + \alpha = (\alpha+1) + \alpha = 2\alpha + 1 = 1$.
- b. En caractéristique 2, $(\alpha+1)^2 = \alpha^2 + 1 = \alpha + 1 + 1 = \alpha$.
- c. De $\alpha^3 = 1$ on tire $\alpha \cdot \alpha^2 = 1$, donc $\alpha^{-1} = \alpha^2 = \alpha + 1$.

12 Critère d'Eisenstein



Les coefficients sont 1, 0, 10, -15, 20. Le premier $p = 5$ divise 0, 10, -15 et 20, ne divise pas le coefficient dominant 1, et $25 \nmid 20$.

Par le critère d'Eisenstein, P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

13 Colorier les sommets d'un carré



On applique la formule de Burnside au groupe des 4 rotations. La rotation nulle fixe les $2^4 = 16$ coloriages ; celles de 90° et 270° fixent les coloriages à sommets de même couleur : 2 ; celle de 180° fixe ceux où les sommets opposés ont la même couleur : $2^2 = 4$.

Nombre d'orbites : $\frac{16 + 2 + 4 + 2}{4} = 6$.

Vérification : 0 noir (1 coloriage), 1 noir (1), 2 noirs adjacents (1), 2 noirs opposés (1), 3 noirs (1), 4 noirs (1) : 6 au total.

14 Inverses dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$



$X^2 - 2$ n'a pas de racine rationnelle (car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$) et est de degré 2 : irréductible. Dans l'anneau principal $\mathbb{Q}[X]$, le quotient est donc un corps.

$(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1) = 2 - 1 = 1$, donc $(1 + \sqrt{2})^{-1} = \sqrt{2} - 1$.

$(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7$, donc $(3 + \sqrt{2})^{-1} = \frac{3 - \sqrt{2}}{7}$.

15 Groupes d'ordre 12



$12 = 4 \times 3$. On a $n_3 \mid 4$ et $n_3 \equiv 1 \pmod{3}$: $n_3 \in \{1, 4\}$.

Si $n_3 = 1$, le 3-Sylow est distingué. Si $n_3 = 4$, les 4 sous-groupes d'ordre 3 (deux à deux d'intersection triviale) contiennent $4 \times 2 = 8$ éléments d'ordre 3. Il reste $12 - 8 = 4$ éléments, qui doivent former tout 2-Sylow (d'ordre 4) : il n'y en a donc qu'un, $n_2 = 1$, et il est distingué.

Dans les deux cas, un Sylow est distingué.

16 Groupes d'ordre 56 non simples

★★★★

$56 = 8 \times 7$. On a $n_7 \mid 8$ et $n_7 \equiv 1 \pmod{7} : n_7 \in \{1, 8\}$.

Si $n_7 = 1$, le 7-Sylow est distingué, propre et non trivial.

Si $n_7 = 8$, les 8 sous-groupes d'ordre 7 s'intersectent deux à deux trivialement (7 est premier) : ils contiennent $8 \times 6 = 48$ éléments d'ordre 7. Il reste $56 - 48 = 8$ éléments, qui forment nécessairement l'unique 2-Sylow (d'ordre 8). Il est distingué.

Dans tous les cas G admet un sous-groupe distingué propre : il n'est pas simple.

17 Le corps à 9 éléments

★★★★

a. $X^2 + 1$ vaut 1, 2, 2 en 0, 1, 2 : pas de racine, degré 2, donc irréductible.

b. $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$. Puis $(1 + i)^4 = (2i)^2 = 4i^2 = -4 \equiv 2 \pmod{3}$, et $(1 + i)^8 = 2^2 = 4 \equiv 1$.

c. Le groupe $\mathbb{F}_9^\times$ a 8 éléments. L'ordre de $1 + i$ divise 8, ne divise pas 4 (car $(1 + i)^4 = 2 \neq 1$) : il vaut 8. L'élément $1 + i$ engendre donc $\mathbb{F}_9^\times$, qui est cyclique.

18 Irréductibilité de $X^4 + 1$

★★★★

On développe :

$$(X + 1)^4 + 1 = X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1 + 1 = X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 2.$$

Le premier 2 divise 4, 6, 4, 2, ne divise pas 1 et $4 \nmid 2$: Eisenstein montre que

$Q(X) = P(X + 1)$ est irréductible. Si $P = AB$ avec A, B non constants, alors

$Q(X) = A(X + 1)B(X + 1)$ serait réductible : contradiction. Donc P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

19

L'idéal $(2, X)$ de $\mathbb{Z}[X]$

★★★★

Supposons $I = (G)$. Comme $2 \in I$, G divise 2 dans $\mathbb{Z}[X]$: en comparant les degrés, G est une constante divisant 2, c'est-à-dire $G = \pm 1$ ou $G = \pm 2$.

Si $G = \pm 1$, alors $1 \in I$, mais tout élément de I a un terme constant pair : contradiction.

Si $G = \pm 2$, alors $X \in I = (2)$ exigerait que 2 divise X dans $\mathbb{Z}[X]$: absurde.

Donc I n'est pas principal, et $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas un anneau principal.

20

Compter les polynômes irréductibles de degré 2

★★★★

Il y a $5^2 = 25$ polynômes unitaires de degré 2. Un tel polynôme est réductible si et seulement s'il s'écrit $(X - a)(X - b)$ avec $a, b \in \mathbb{F}_5$ (degré 2 : réductible équivaut à avoir une racine).

Ces produits correspondent aux paires non ordonnées $\{a, b\}$ avec répétition :

$$\binom{5}{2} + 5 = 10 + 5 = 15.$$

Il y a donc $25 - 15 = 10$ polynômes irréductibles, ce qui coïncide avec la formule

$$\frac{p^2 - p}{2} = \frac{25 - 5}{2} = 10.$$

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)


Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Groupes, anneaux et corps : exercices de maths Licence L3

 QCM de maths

Groupes, anneaux et corps : QCM de maths Licence L3

 Contrôles de maths

Groupes, anneaux et corps : contrôle de maths Licence L3

 Exercices de maths

Topologie des espaces métriques : exercices de maths Licence L3

 Exercices de maths

Espaces complets et point fixe : exercices de maths Licence L3

 QCM de maths

Topologie des espaces métriques : QCM de maths Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage