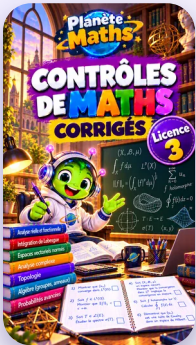


Groupes, anneaux et corps : corrigé du contrôle de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre de contrôles corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 52 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigé du contrôle avec le barème détaillé. Compte tes points et repère ce qu'il faut revoir.

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice autorisée seulement quand l'énoncé le précise.

1 Un groupe quotient cyclique

/ 4 pts

- $H = \{0, 6, 12, 18, 24\}$, d'ordre 5. (1 pt)
- $|G/H| = 30/5 = 6$. La classe de 1 engendre le quotient, qui est cyclique d'ordre 6 : $G/H \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. (1 pt)
- $k \cdot 4 \in H$ équivaut à $6 \mid 4k$ (puisque $6 \mid 30$), soit $3 \mid 2k$, soit $3 \mid k$. Le plus petit $k \geq 1$ est 3 : l'ordre vaut 3. (1 pt)
- $4 + H = \{4, 10, 16, 22, 28\}$. (1 pt)

2 Action de S_4 sur les partitions en deux paires

/ 4 pts

- a. La transposition $(2\ 3)$ envoie $\{12|34\}$ sur $\{13|24\} = b$ et $(2\ 4)$ l'envoie sur $\{14|32\} = c$. L'orbite contient a, b, c : c'est X . (1,5 pt)
- b. $|G_a| = 24/3 = 8$. (1 pt)
- c. Par exemple $(1\ 2)$, $(3\ 4)$ et $(1\ 3)(2\ 4)$: le premier échange 1 et 2 sans changer la paire $\{1, 2\}$, le second laisse la paire $\{3, 4\}$ invariante et le troisième échange les deux paires. (1,5 pt)

3 Groupes d'ordre 45

/ 4 pts

- a. $45 = 9 \times 5$. $n_5 \mid 9$ donc $n_5 \in \{1, 3, 9\}$, et $n_5 \equiv 1 \pmod{5}$: 3 et 9 ne conviennent pas ($3 \equiv 3, 9 \equiv 4$). Donc $n_5 = 1$. (1,5 pt)
- b. $n_3 \mid 5$ donc $n_3 \in \{1, 5\}$, et $n_3 \equiv 1 \pmod{3}$: $5 \equiv 2$ ne convient pas. Donc $n_3 = 1$. (1 pt)
- c. Les deux Sylow P (ordre 9) et Q (ordre 5) sont distingués et d'intersection triviale, donc $G \cong P \times Q$. Comme P (ordre 3^2) et Q (ordre premier) sont abéliens, G est abélien. (1,5 pt)

4 Un quotient de $\mathbb{Z}[i]$

/ 4 pts

- a. $10 = (3 + i)(3 - i) \in I$. (1 pt)
- b. Comme $(-3)^2 = 9 \equiv -1 \pmod{10}$, φ respecte $i^2 = -1$ et donc les produits ; pour $a \in \mathbb{Z}$, $\varphi(a) = a \pmod{10}$, d'où la surjectivité. (1 pt)
- c. $\varphi(3 + i) = 3 - 3 = 0$ donne $I \subset \ker \varphi$. Réciproquement, si $a \equiv 3b \pmod{10}$:
$$\frac{a + bi}{3 + i} = \frac{(a + bi)(3 - i)}{10} = \frac{(3a + b) + (3b - a)i}{10}$$
 avec $3a + b \equiv 10b \equiv 0$ et $3b - a \equiv 0$ modulo 10 ; le quotient est dans $\mathbb{Z}[i]$. Donc $\ker \varphi = I$ et $\mathbb{Z}[i]/I \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. (1,5 pt)
- d. Non : $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ a des diviseurs de zéro ($2 \times 5 = 0$). L'élément $3 + i$ n'est pas irréductible. (0,5 pt)

5 Irréductibilité et corps

/ 4 pts

- a. Avec $p = 3$: 3 divise 0, -9 et 3, ne divise pas 1, et $9 \nmid 3$. Eisenstein donne l'irréductibilité. (1,5 pt)
- b. P irréductible implique que K est un corps de degré $\deg P = 3$ sur $\mathbb{Q}$, de base $(1, x, x^2)$ où x est la classe de X . (1 pt)
- c. On a $2^2 + 2 + 1 = 7 \equiv 0$ et $4^2 + 4 + 1 = 21 \equiv 0$. Donc 2 et 4 sont racines et $X^2 + X + 1 = (X - 2)(X - 4)$ car $-6 \equiv 1$ et $8 \equiv 1 \pmod{7}$. (1,5 pt)

Le livre de contrôles corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 52 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

 Zyro te conseille la suite

 Contrôles de maths

Groupes, anneaux et corps : contrôle de maths Licence L3

 Cours de maths

Groupes, anneaux et corps : cours de maths Licence L3

 QCM de maths

Groupes, anneaux et corps : QCM de maths Licence L3

 Contrôles de maths

Topologie des espaces métriques : contrôle de maths Licence L3

 Contrôles de maths

 Cours de maths

Espaces complets et point fixe : contrôle
de maths Licence L3

Topologie des espaces métriques : cours
de maths Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage