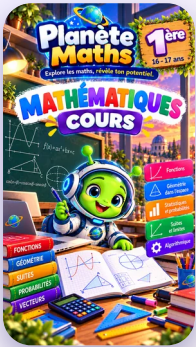


Géométrie repérée : cours de maths 1ère à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths 1ère

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

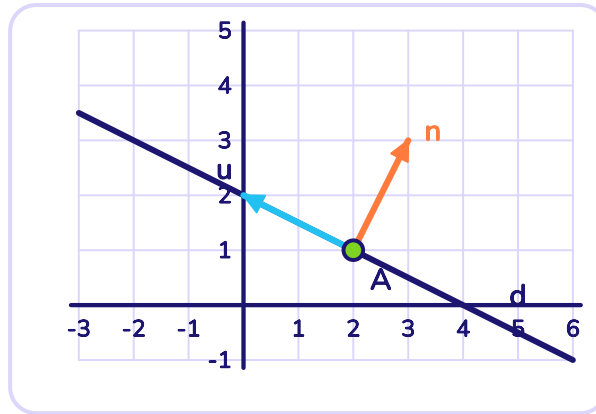
Un drone qui longe une clôture, un radar qui balaie un disque autour d'un phare, une trajectoire qui rase un obstacle sans le toucher : tous ces problèmes se résolvent en plaçant la situation dans un **repère orthonormé** et en la traduisant par des **équations**. Dans ce chapitre, tu vas apprendre à décrire une droite grâce à un vecteur normal, un cercle grâce à son centre et son rayon, puis à étudier leurs positions relatives avec le produit scalaire.

1. Vecteur normal à une droite

D

Vecteur normal

Un **vecteur normal** à une droite d est un vecteur non nul $\vec{n}$ orthogonal à un vecteur directeur de d . Une droite possède une infinité de vecteurs normaux, tous colinéaires entre eux.



Sur la figure, la droite d a pour vecteur directeur $\vec{u}(-2; 1)$ et pour vecteur normal $\vec{n}(1; 2)$: en effet $\vec{u} \cdot \vec{n} = -2 \times 1 + 1 \times 2 = 0$.

P Droite définie par un point et un vecteur normal

Soit A un point et $\vec{n}$ un vecteur non nul. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Cette propriété est la clé de tout le chapitre : dire que M est sur la droite revient à dire que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{n}$.

I 2. Équation cartésienne d'une droite

P Équation cartésienne

Dans un repère orthonormé, toute droite admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$. Le vecteur $\vec{n}(a; b)$ est un vecteur normal à cette droite et $\vec{u}(-b; a)$ en est un vecteur directeur. Réciproquement, tout ensemble d'équation $ax + by + c = 0$ est une droite.

Pourquoi ? Si $A(x_A; y_A)$ est un point de la droite et $M(x; y)$ un point quelconque, alors $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x - x_A) + b(y - y_A)$. Cette quantité est nulle exactement quand $ax + by + c = 0$

avec $c = -ax_A - by_A$.

M

Méthode : trouver une équation cartésienne

1. Repère un point A de la droite et un vecteur normal $\vec{n}(a; b)$ (s'il te manque $\vec{n}$, déduis-le d'un vecteur directeur $(u_1; u_2)$ en prenant $(u_2; -u_1)$, qui est orthogonal à $(u_1; u_2)$).
2. Écris $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$.
3. Développe et regroupe sous la forme $ax + by + c = 0$.
4. Vérifie en remplaçant x et y par les coordonnées de A .

E

Exemple 1

Droite passant par $A(2; -1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(3; 4)$.

$M(x; y)$ appartient à la droite si et seulement si $3(x - 2) + 4(y + 1) = 0$, c'est-à-dire $3x + 4y - 2 = 0$. Vérification : $3 \times 2 + 4 \times (-1) - 2 = 0$.

E

Exemple 2

Droite (AB) pour $A(1; 2)$ et $B(5; 4)$.

On a $\overrightarrow{AB}(4; 2)$: c'est un vecteur directeur, donc $\vec{n}(-2; 4)$ est normal. Une équation est $-2x + 4y + c = 0$. Comme A est sur la droite, $-2 + 8 + c = 0$, donc $c = -6$. La droite (AB) a pour équation $-2x + 4y - 6 = 0$, soit, en divisant par -2 , $x - 2y + 3 = 0$. Vérification avec B : $5 - 8 + 3 = 0$.



Attention

Les équations $x - 2y + 3 = 0$ et $-2x + 4y - 6 = 0$ décrivent la même droite : on peut multiplier tous les coefficients par un même nombre non nul. Ne confonds pas le vecteur normal $(a; b)$ avec le vecteur directeur $(-b; a)$.

3. Droites parallèles et perpendiculaires

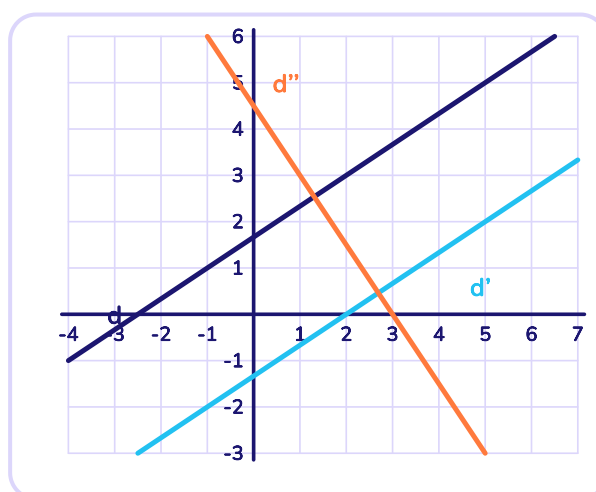
Deux droites sont parallèles quand leurs vecteurs normaux sont colinéaires, et perpendiculaires quand leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.



Position relative de deux droites

Soit $d : ax + by + c = 0$ et $d' : a'x + b'y + c' = 0$.

- d et d' sont **parallèles** (ou confondues) si et seulement si $ab' - a'b = 0$.
- d et d' sont **perpendiculaires** si et seulement si $aa' + bb' = 0$.



E**Exemple 3**

Les droites $d : 2x - 3y + 5 = 0$ et $d' : 2x - 3y - 4 = 0$ ont pour normaux $(2; -3)$ et $(2; -3)$: elles sont parallèles. La droite $d'' : 3x + 2y - 9 = 0$ a pour normal $(3; 2)$ et $2 \times 3 + (-3) \times 2 = 0$: elle est perpendiculaire à d (et à d').

E**Exemple 4**

Perpendiculaire à $d : 2x - 3y + 5 = 0$ passant par $P(1; 3)$.

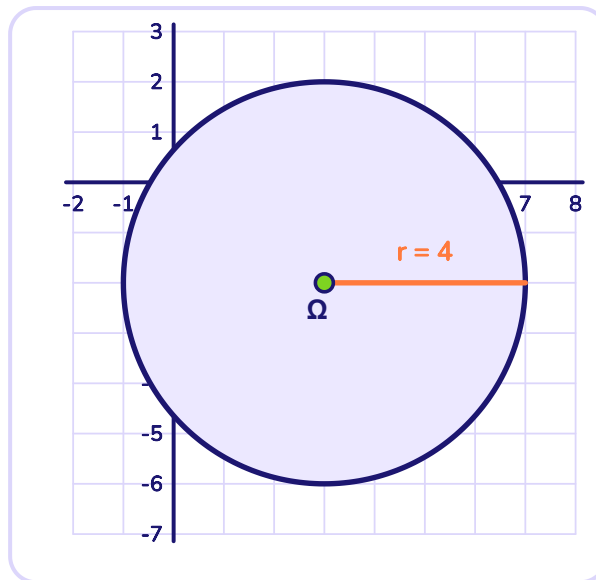
Le vecteur normal de d est $(2; -3)$: c'est un vecteur directeur de la perpendiculaire, donc $(3; 2)$ lui est normal. On cherche $3x + 2y + c = 0$; avec $P : 3 + 6 + c = 0$, donc $c = -9$. L'équation est $3x + 2y - 9 = 0$.

4. Équation d'un cercle

P**Équation d'un cercle**

Dans un repère orthonormé, le cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon $r > 0$ est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $\Omega M = r$, c'est-à-dire

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$



Cette égalité n'est autre que la formule de la distance $\Omega M^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$. Le cercle de la figure a pour équation $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$.

M

Méthode : reconnaître un cercle

1. Regroupe les termes en x et ceux en y .
2. Transforme chaque groupe en carré avec la forme canonique :

$$x^2 - 2ax = (x - a)^2 - a^2.$$
3. Isole le second membre : si c'est un nombre strictement positif r^2 , c'est un cercle ; si c'est 0 , un point ; s'il est négatif, l'ensemble est vide.

E

Exemple 5

Étudier $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$.

$x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$ et $y^2 + 4y = (y + 2)^2 - 4$. L'équation devient $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 3 + 9 + 4 = 16$: c'est le cercle de centre $(3; -2)$ et de rayon 4, celui de la figure.

P**Cercle de diamètre $[AB]$**

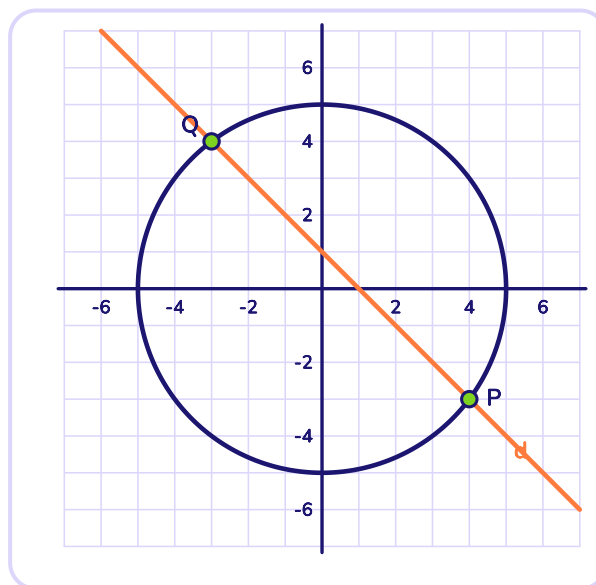
Un point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, c'est-à-dire $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$.

E**Exemple 6**

Pour $A(-1; 2)$ et $B(5; -2)$: $(x + 1)(x - 5) + (y - 2)(y + 2) = 0$, soit $x^2 - 4x - 5 + y^2 - 4 = 0$, donc $(x - 2)^2 + y^2 = 13$. Le centre $(2; 0)$ est bien le milieu de $[AB]$ et $r^2 = AB^2/4 = 52/4 = 13$.

5. Intersection d'une droite et d'un cercle

Pour trouver les points communs à une droite et à un cercle, on résout le **système** formé par leurs deux équations : on exprime y (ou x) grâce à la droite, on le remplace dans l'équation du cercle, puis on résout une équation du second degré. Le discriminant Δ donne le nombre de points.



E

Exemple 7

Cercle $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 25$ et droite $d : x + y = 1$.

De $y = 1 - x$, on tire $x^2 + (1 - x)^2 = 25$, soit $2x^2 - 2x - 24 = 0$, puis $x^2 - x - 12 = 0$. Les solutions sont $x = 4$ et $x = -3$, d'où les points $P(4; -3)$ et $Q(-3; 4)$: on vérifie $16 + 9 = 25$.

P

Trois situations

- $\Delta > 0$: la droite est **sécante** au cercle, deux points communs ;
- $\Delta = 0$: la droite est **tangente** au cercle, un seul point commun ;
- $\Delta < 0$: la droite et le cercle n'ont **aucun** point commun.

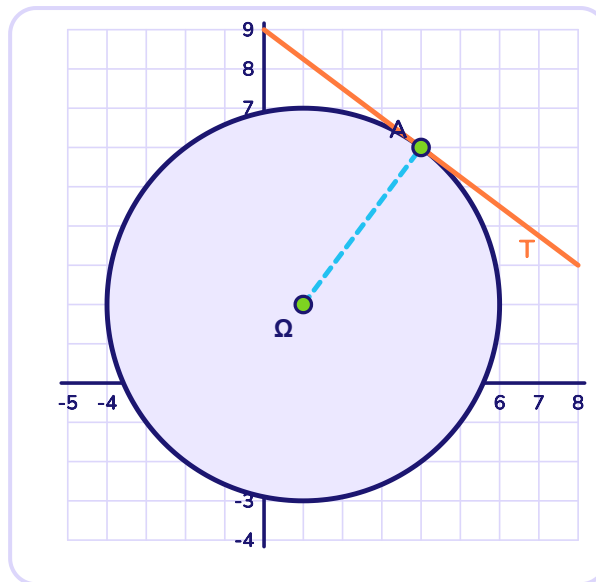
Par exemple, avec $x^2 + y^2 = 25$ et $x + y = 8$, on obtient $2x^2 - 16x + 39 = 0$ de discriminant $\Delta = 256 - 312 = -56 < 0$: aucun point commun. Avec $3x + 4y = 25$, on trouve $25x^2 - 150x + 225 = 0$, soit $(x - 3)^2 = 0$: la droite touche le cercle en un unique point $(3; 4)$.

6. Tangente à un cercle

P

Tangente en un point

La tangente au cercle de centre Ω en un point A du cercle est la droite passant par A et perpendiculaire au rayon (ΩA) . Le vecteur $\overrightarrow{\Omega A}$ en est donc un **vecteur normal** : M est sur la tangente si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = 0$.



E

Exemple 8

Cercle de centre $\Omega(1; 2)$ et de rayon 5, point $A(4; 6)$.

D'abord A est sur le cercle : $\Omega A^2 = 3^2 + 4^2 = 25$. Le vecteur $\overrightarrow{\Omega A}(3; 4)$ est normal à la tangente, donc $3(x - 4) + 4(y - 6) = 0$, soit $3x + 4y - 36 = 0$.

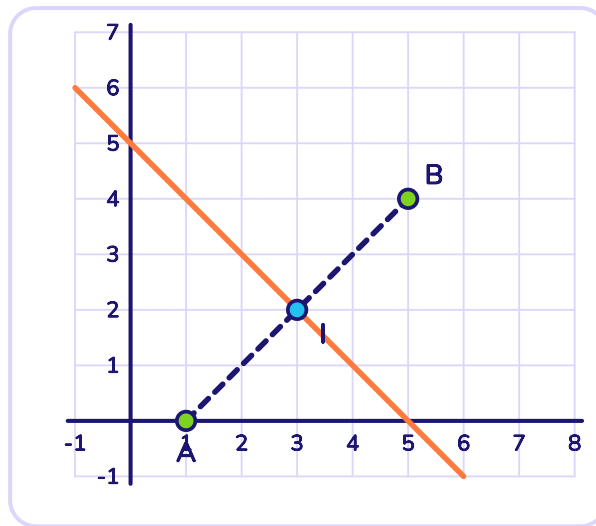
!

Astuce de Zyro

Sur ma planète, on teste une tangente en un clin d'œil : le vecteur « centre vers point de contact » doit être le vecteur normal. Si les coefficients de x et y de ton équation ne sont pas proportionnels à ce vecteur, c'est raté !

7. Ensembles de points

Beaucoup de lieux géométriques se ramènent à une équation. Il suffit d'écrire la condition vérifiée par $M(x; y)$, de développer, puis de reconnaître une droite (termes en x^2 et y^2 qui s'annulent) ou un cercle.



E Exemple 9

Ensemble des points M tels que $MA = MB$ pour $A(1; 0)$ et $B(5; 4)$.

$MA^2 = MB^2$ donne $(x - 1)^2 + y^2 = (x - 5)^2 + (y - 4)^2$, soit
 $-2x + 1 = -10x - 8y + 41$, donc $8x + 8y - 40 = 0$ et $x + y - 5 = 0$. C'est la
médiatrice de $[AB]$: elle passe par le milieu $I(3; 2)$ et son vecteur normal $(1; 1)$ est
colinéaire à $\overrightarrow{AB}(4; 4)$.



Attention

Une équation $x^2 + y^2 + \dots = 0$ n'est pas toujours un cercle : après avoir mis sous
forme canonique, un second membre nul donne un point et un second membre négatif
donne l'ensemble vide.

À retenir

- Un vecteur normal à une droite est orthogonal à sa direction ; la droite d'équation $ax + by + c = 0$ a pour vecteur normal $(a ; b)$ et pour vecteur directeur $(-b ; a)$.
- La droite passant par A de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
- Deux droites sont parallèles si $ab' - a'b = 0$, perpendiculaires si $aa' + bb' = 0$.
- Le cercle de centre $(a ; b)$ et de rayon r a pour équation $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
- Pour l'intersection d'une droite et d'un cercle, on substitue puis on étudie le discriminant : 2, 1 ou 0 point.
- La tangente en A au cercle de centre Ω est la droite passant par A de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega A}$.
- Pour un ensemble de points, on traduit la condition, on développe, puis on reconnaît droite, cercle, point ou ensemble vide.

Le livre de cours de maths 1ère

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

  **Zyro te conseille la suite**

 Exercices de maths

Géométrie repérée : exercices de maths
1ère

 Contrôles de maths

Géométrie repérée : contrôle de maths
1ère

 QCM de maths

Géométrie repérée : QCM de maths 1ère

 Exercices de maths

Probabilités conditionnelles : exercices
de maths 1ère

 Exercices de maths

Variables aléatoires : exercices de maths
1ère

 Contrôles de maths

Probabilités conditionnelles : contrôle de
maths 1ère

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage