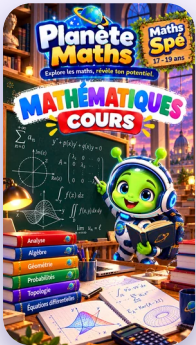


Courbes, surfaces et géométrie euclidienne : cours de maths Maths Spé à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Une courbe ou une surface se décrit par une équation, par un graphe ou par un paramétrage. Ce chapitre réunit les outils de la deuxième année pour les étudier : tangente, longueur, courbure, coniques, quadriques, plans tangents, puis les transformations qui conservent les distances.

1. Arcs paramétrés

D

Arc paramétré

Un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ est une application $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$), $t \mapsto (x(t), y(t))$, de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I . Le point $\gamma(t_0)$ est **régulier** si $\gamma'(t_0) \neq 0$, **stationnaire** sinon.

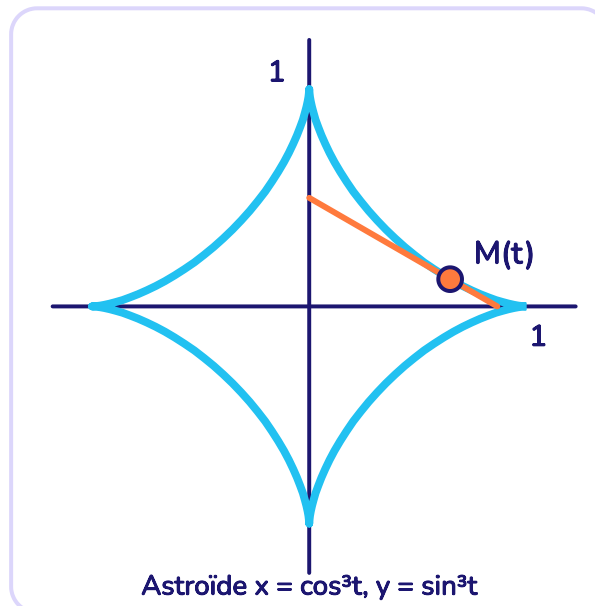
P

Tangente

En un point régulier, la courbe admet une tangente dirigée par $\gamma'(t_0)$, d'équation $x'(t_0)(y - y(t_0)) - y'(t_0)(x - x(t_0)) = 0$. En un point stationnaire, si $\gamma^{(p)}(t_0)$ est le premier vecteur dérivé non nul, la tangente est dirigée par $\gamma^{(p)}(t_0)$.

E

Exemple 1 Soit $\gamma(t) = (t^2, t^3)$. Pour $t = 1$: $\gamma(1) = (1, 1)$ et $\gamma'(1) = (2, 3)$, donc la tangente est $3(x - 1) - 2(y - 1) = 0$, soit $3x - 2y - 1 = 0$. Pour $t = 0$: $\gamma'(0) = (0, 0)$, $\gamma''(0) = (2, 0)$, $\gamma^{(3)}(0) = (0, 6)$ non colinéaire à $\gamma''(0)$. La tangente en l'origine est l'axe (Ox) et le point est un rebroussement de première espèce.



L'astroïde ci-dessus admet quatre points stationnaires (les sommets sur les axes). La tangente en $M(t)$ a pour équation $x \sin t + y \cos t = \sin t \cos t$: elle coupe les axes en $(\cos t, 0)$ et $(0, \sin t)$, donc le segment découpé a toujours pour longueur 1.

2. Longueur d'un arc

D Longueur

Pour γ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, la longueur de l'arc est

$$L = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Elle ne dépend pas du paramétrage (changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement monotone). L'**abscisse curviligne** d'origine t_0 est $s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du$. Pour un graphe $y = f(x)$, $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$.

E Exemple 2 Pour $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ sur $[0, 1]$, $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4t^2 + 9t^4} = t\sqrt{4 + 9t^2}$ pour $t \geq 0$. Donc

$$L = \int_0^1 t\sqrt{4 + 9t^2} dt = \left[\frac{1}{27} (4 + 9t^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{13\sqrt{13} - 8}{27} \approx 1,44.$$



Attention La longueur se calcule avec la norme $\|\gamma'\|$, jamais avec $|x'| + |y'|$. La distance entre les extrémités est seulement un minortant de L .

3. Courbure

D Courbure

Pour un arc birégulier plan, la courbure algébrique est

$$\kappa(t) = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}, \quad \text{et pour un graphe : } \kappa = \frac{f''}{(1 + f'^2)^{3/2}}.$$

Le **rayon de courbure** est $R = 1/|\kappa|$. Le **cercle osculateur** est le cercle de rayon R centré sur la normale, du côté de la concavité : c'est le cercle qui épouse le mieux la courbe au point considéré.

E Exemple 3 Pour le cercle $x = r \cos t$, $y = r \sin t$: $x'y'' - y'x'' = r^2$ et $(x'^2 + y'^2)^{3/2} = r^3$, donc $\kappa = 1/r$. Pour la parabole $y = x^2$, $\kappa(x) = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}$; au sommet $\kappa = 2$, $R = \frac{1}{2}$ et le cercle osculateur a pour centre $(0, \frac{1}{2})$.

4. Coniques

D Conique

Étant donné un foyer F , une droite directrice D et $e > 0$, la conique est l'ensemble des points M tels que $MF = e \cdot d(M, D)$. Elle est une ellipse si $e < 1$, une parabole si $e = 1$, une hyperbole si $e > 1$.

Conique	Équation réduite	Foyers, excentricité	Propriété
Ellipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a > b > 0$	$c^2 = a^2 - b^2$ $F(\pm c, 0)$, $e = c/a$	$MF + MF' = 2a$
Hyperbole	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$c^2 = a^2 + b^2$ $F(\pm c, 0)$, $e = c/a$	$ MF - MF' = 2a$, asymptotes $y = \pm \frac{b}{a}x$
Parabole	$y^2 = 2px$	$F(\frac{p}{2}, 0)$, directrice $x = -\frac{p}{2}$, $e = 1$	$MF = d(M, D)$

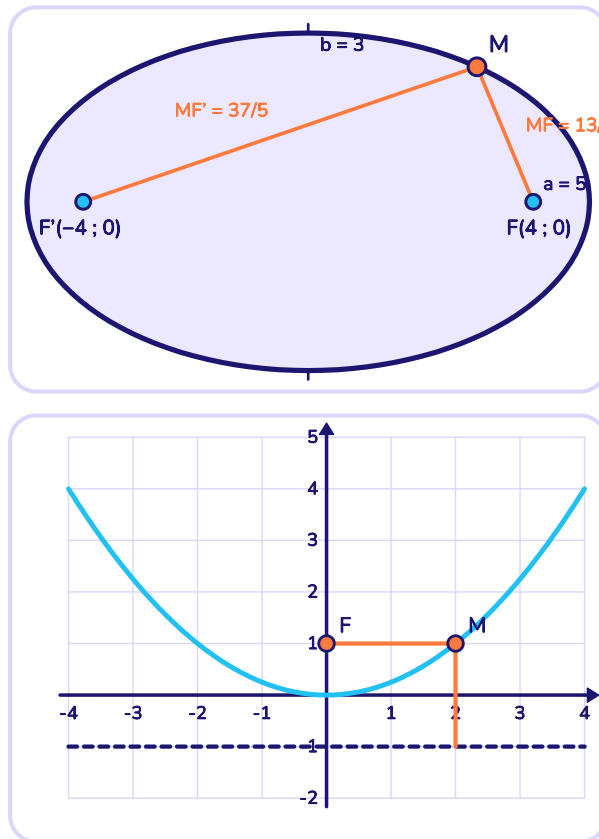
P

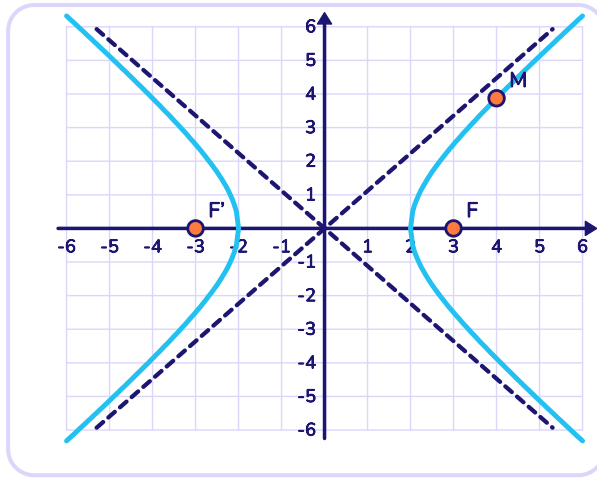
Tangentes

La tangente au point (x_0, y_0) de la conique a pour équation $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ (ellipse), $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$ (hyperbole), $yy_0 = p(x + x_0)$ (parabole). Pour une équation générale $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + \dots = 0$ non dégénérée, le signe de $B^2 - 4AC$ donne la nature : négatif pour une ellipse, nul pour une parabole, positif pour une hyperbole.

E

Exemple 4 Pour $4x^2 + 9y^2 = 36$, soit $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$: $a = 3, b = 2$,
 $c = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$, $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$ et les foyers sont $(\pm\sqrt{5}, 0)$.





5. Quadriques

D Quadrique

Une quadrique de $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $q(x, y, z) + \ell(x, y, z) + c = 0$, où q est une forme quadratique non nulle, ℓ une forme linéaire et c un réel.

M Réduire une quadrique

1. Écrire la matrice symétrique S de q .
2. La diagonaliser dans une base orthonormée (théorème spectral) :

$$q = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2.$$
3. Compléter les carrés pour absorber la partie linéaire.
4. Lire les signes des coefficients et reconnaître la surface dans le tableau.

Équation réduite	Nom
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	ellipsoïde
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	hyperboloïde à une nappe
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	hyperboloïde à deux nappes
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$	cône
$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	paraboloïde elliptique
$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$	paraboloïde hyperbolique
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	cylindre elliptique



Courbes surfaces Maths Spé : un ellipsoïde, un hyperboloïde à une nappe et un paraboloïde hyperbolique représentés en trois dimensions

E

Exemple 5 Soit $2x^2 + 2y^2 - z^2 + 2xy = 3$. La matrice est $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, de valeurs propres **3** (vecteur $(1, 1, 0)$), **1** (vecteur $(1, -1, 0)$) et **-1** (vecteur $(0, 0, 1)$). Avec $u = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$, $v = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$, $w = z$: $3u^2 + v^2 - w^2 = 3$, soit $u^2 + \frac{v^2}{3} - \frac{w^2}{3} = 1$. Deux signes positifs et un négatif : c'est un hyperboloïde à une nappe.

6. Surfaces et plan tangent

Une surface se donne par un graphe $z = f(x, y)$, par une équation $F(x, y, z) = 0$ ou par une nappe paramétrée $(u, v) \mapsto S(u, v)$.

P

Plan tangent

- Graphe de f de classe $\mathcal{C}^1$ en (a, b) :
$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b).$$
- Surface $F = 0$ avec $\nabla F(M_0) \neq 0$: le plan tangent en M_0 est le plan passant par M_0 et de vecteur normal $\nabla F(M_0)$.
- Nappe paramétrée : un vecteur normal est $\frac{\partial S}{\partial u} \wedge \frac{\partial S}{\partial v}$, s'il est non nul.

E

Exemple 6 Pour $z = x^2 + y^2$ en $(1, 2)$: $f(1, 2) = 5$, $f_x = 2x = 2$, $f_y = 2y = 4$, donc $z = 5 + 2(x - 1) + 4(y - 2)$, soit $z = 2x + 4y - 5$. Pour l'ellipsoïde $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ en $(1, 1, 1)$: $\nabla F = (2x, 4y, 6z) = (2, 4, 6)$, et le plan tangent est $x + 2y + 3z = 6$.

7. Orthogonalité dans l'espace

P

Outils

Deux vecteurs sont orthogonaux si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Le produit vectoriel $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ est orthogonal à $\mathbf{u}$ et à $\mathbf{v}$, et $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| |\sin \theta|$. Pour un sous-espace F d'un espace euclidien E : $E = F \oplus F^\perp$ et $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$.

- Distance d'un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ au plan $ax + by + cz + d = 0$:
$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$
- Distance de M à la droite passant par A , de vecteur directeur $\mathbf{u}$: $\frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}.$

E

Exemple 7 Le point $M(1, 2, 3)$ et le plan $2x - y + 2z - 4 = 0$:

$d = \frac{|2 - 2 + 6 - 4|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{2}{3}$. Pour la droite passant par $A(1, 0, 2)$ de vecteur

$\mathbf{u} = (1, 2, 2)$ et le point $M(3, 1, 1)$: $\overrightarrow{AM} = (2, 1, -1)$, $\overrightarrow{AM} \wedge \mathbf{u} = (4, -5, 3)$ de norme $\sqrt{50}$, donc $d = \frac{5\sqrt{2}}{3}$.

!

Astuce de Zyro Pour savoir si une surface est de révolution autour d'un axe, vérifiez que deux des valeurs propres de sa matrice sont égales : l'axe est alors la direction propre de la troisième.

8. Isométries affines

D Isométrie affine

Une application f de l'espace euclidien dans lui-même qui conserve les distances est affine, de la forme $f(M) = UM + b$ avec U orthogonale ($U^T U = I$). On a $\det U = \pm 1$: f est un **déplacement** si $\det U = 1$, un **antidéplacement** si $\det U = -1$.

P Classification dans le plan

Un déplacement est une translation ($U = I$) ou une rotation, d'angle θ tel que $\cos \theta = \frac{1}{2} \operatorname{tr} U$. Un antidéplacement est une réflexion (s'il a des points fixes) ou une symétrie glissée (sinon). Dans l'espace, un déplacement de partie linéaire $U \neq I$ est une rotation ou un vissage d'axe dirigé par $\ker(U - I)$, avec $\operatorname{tr} U = 1 + 2 \cos \theta$.

E Exemple 8 Soit $f(x, y) = \left(\frac{3x - 4y + 6}{5}, \frac{4x + 3y - 2}{5} \right)$. La matrice $U = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ est orthogonale de déterminant 1. Le point $(1, 1)$ est fixe, donc f est la rotation de centre $(1, 1)$ et d'angle θ avec $\cos \theta = \frac{3}{5}$, $\sin \theta = \frac{4}{5}$, soit $\theta \approx 53,1^\circ$.

À retenir

- Tangente en un point régulier : dirigée par γ' ; en un point stationnaire : par le premier dérivé non nul.
- Longueur : $L = \int \|\gamma'\|$; courbure plane : $\kappa = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$, rayon $R = 1/|\kappa|$.
- Ellipse : $c^2 = a^2 - b^2$, $MF + MF' = 2a$; hyperbole : $c^2 = a^2 + b^2$, $|MF - MF'| = 2a$; parabole : $MF = d(M, D)$.
- Une quadrique se réduit par diagonalisation orthogonale ; les signes des valeurs propres donnent sa nature.
- Plan tangent : gradient (surface implicite), dérivées partielles (graphe), produit vectoriel (nappe).
- Isométrie affine : partie linéaire orthogonale ; déterminant 1 pour un déplacement, -1 pour un antidéplacement.

Le livre de cours de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

  **Zyro te conseille la suite**

 Exercices de maths

Courbes, surfaces et géométrie euclidienne : exercices de maths Maths Spé

 Contrôles de maths

Courbes, surfaces et géométrie euclidienne : contrôle de maths Maths Spé

 QCM de maths

Courbes, surfaces et géométrie euclidienne : QCM de maths Maths Spé

 Exercices de maths

Réduction des endomorphismes : exercices de maths Maths Spé

 Exercices de maths

Espaces euclidiens : exercices de maths Maths Spé

 Contrôles de maths

Réduction des endomorphismes : contrôle de maths Maths Spé

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage