

Courbes, surfaces et géométrie euclidienne : exercices corrigés de maths Maths Spé à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Tangente en un point régulier



On a $\gamma(2) = (3, 6)$. La dérivée est $\gamma'(t) = (2t, 3t^2 - 1)$, donc $\gamma'(2) = (4, 11) \neq 0$: le point est régulier.

La tangente est dirigée par $(4, 11)$: $11(x - 3) - 4(y - 6) = 0$, soit $11x - 4y - 9 = 0$.

Vérification : $11 \times 3 - 4 \times 6 - 9 = 0$.

2 Point stationnaire



$x'(t) = 3t^2 - 3 = 3(t-1)(t+1)$ s'annule en $t = \pm 1$. $y'(t) = 2t - 2$ s'annule en $t = 1$ seulement.

Les deux dérivées s'annulent simultanément uniquement pour $t = 1$. L'unique point stationnaire est $\gamma(1) = (-2, -1)$.

3 Longueur d'un arc de cercle



$\gamma'(t) = (-4 \sin t, 4 \cos t)$ et $\|\gamma'(t)\| = 4$.

$$L = \int_0^{\pi/3} 4 dt = \frac{4\pi}{3} \approx 4,19.$$

On retrouve la formule « rayon fois angle » : $4 \times \pi/3$.

4 Éléments d'une ellipse



Ici $a = 5$ et $b = 3$. On calcule $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16} = 4$.

Les foyers sont $F(4, 0)$ et $F'(-4, 0)$, et $e = c/a = \frac{4}{5}$.

5 Foyer et directrice d'une parabole



On identifie $2p = 8$, donc $p = 4$.

Le foyer est $F(p/2, 0) = (2, 0)$ et la directrice est la droite $x = -2$.

6 Distance d'un point à un plan



Le numérateur vaut $|1 + 2(-2) - 2(3) + 5| = |1 - 4 - 6 + 5| = 4$. Le dénominateur vaut $\sqrt{1 + 4 + 4} = 3$.

La distance est $\frac{4}{3}$.

7 Orthogonalité de vecteurs



a. $u \cdot v = 3 - 2 - 1 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux.

b. $u \cdot w_k = k + 6 - 2 = k + 4$. Cette quantité est nulle si et seulement si $k = -4$.

8 Longueur d'une spirale



$x'(t) = e^t(\cos t - \sin t)$ et $y'(t) = e^t(\sin t + \cos t)$. Alors

$x'^2 + y'^2 = e^{2t}[(\cos t - \sin t)^2 + (\cos t + \sin t)^2] = 2e^{2t}$, donc $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}e^t$.

$$L = \sqrt{2} \int_0^1 e^t dt = \sqrt{2}(e - 1) \approx 2,43.$$

9 Courbure d'une chaînette



$y' = \sinh x$, $y'' = \cosh x$ et $1 + y'^2 = \cosh^2 x$. Donc

$$\kappa = \frac{\cosh x}{(\cosh^2 x)^{3/2}} = \frac{\cosh x}{\cosh^3 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

Pour $x = 0$: $\kappa = 1$, $R = 1$. Pour $x = \ln 2$: $\cosh(\ln 2) = \frac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}$, donc $\kappa = \frac{16}{25}$ et $R = \frac{25}{16}$.

10 Somme des distances aux foyers



$$\frac{9}{25} + \frac{144/25}{9} = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1 : M \text{ est sur l'ellipse.}$$

$$MF = \sqrt{1 + \frac{144}{25}} = \sqrt{\frac{169}{25}} = \frac{13}{5} \text{ et } MF' = \sqrt{49 + \frac{144}{25}} = \sqrt{\frac{1369}{25}} = \frac{37}{5}.$$

La somme vaut $\frac{50}{5} = 10 = 2a$, comme prévu.

11 Tangente à une ellipse



La tangente a pour équation $\frac{3x}{25} + \frac{(12/5)y}{9} = 1$, soit $\frac{3x}{25} + \frac{4y}{15} = 1$.

En multipliant par 75 : $9x + 20y = 75$. Vérification : $27 + 48 = 75$.

12 Hyperbole, foyers et asymptotes



a. $a = 2, b = \sqrt{5}, c = \sqrt{4+5} = 3$. Foyers $(\pm 3, 0)$, $e = \frac{3}{2}$, asymptotes $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x$.

b. $\frac{16}{4} - \frac{15}{5} = 4 - 3 = 1$. Ensuite $MF = \sqrt{1+15} = 4$ et $MF' = \sqrt{49+15} = 8$,
donc $|MF - MF'| = 4 = 2a$.

13 Reconnaître des quadriques



- a. Trois signes positifs, second membre positif : ellipsoïde (de révolution autour de (Oz)).
- b. Second membre nul, deux signes positifs et un négatif : cône de révolution d'axe (Oz) .
- c. Forme $z =$ différence de carrés : parabolôïde hyperbolique.
- d. $z^2 - x^2 - y^2 = 1$: hyperboloïde à deux nappes, d'axe (Oz) .

14 Plan tangent à un graphe



$f(1, 2) = 5, f_x(x, y) = 2x$ donc $f_x(1, 2) = 2, f_y(x, y) = 2y$ donc $f_y(1, 2) = 4$.

Plan tangent : $z = 5 + 2(x - 1) + 4(y - 2) = 2x + 4y - 5$.

Vérification en $(1, 2, 5)$: $2 + 8 - 5 = 5$.

15 Distance d'un point à une droite



$\overrightarrow{AM} = (2, 1, -1)$. Le produit vectoriel est

$$\overrightarrow{AM} \wedge \mathbf{u} = (1 \cdot 2 - (-1) \cdot 2, (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 2, 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = (4, -5, 3).$$

Sa norme vaut $\sqrt{16 + 25 + 9} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ et $\|\mathbf{u}\| = 3$.

La distance est $\frac{5\sqrt{2}}{3} \approx 2,36$.

16 Longueur totale de l'astroïde



a. $\gamma'(t) = (-3 \cos^2 t \sin t, 3 \sin^2 t \cos t)$, donc $\|\gamma'(t)\| = 3|\sin t \cos t|$. Par symétrie,

$$L = 4 \int_0^{\pi/2} 3 \sin t \cos t dt = 12 \left[\frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{\pi/2} = 6.$$

b. La tangente est dirigée par $(-\cos t, \sin t)$ (on a simplifié par $3 \sin t \cos t > 0$), donc un vecteur normal est $(\sin t, \cos t)$. Elle passe par $M(\cos^3 t, \sin^3 t)$:

$$x \sin t + y \cos t = \sin t \cos^3 t + \cos t \sin^3 t = \sin t \cos t.$$

Elle coupe (Ox) en $(\cos t, 0)$ et (Oy) en $(0, \sin t)$. La longueur du segment est

$$\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1.$$

17 Courbure d'une ellipse



a. $x' = -5 \sin t, y' = 3 \cos t, x'' = -5 \cos t, y'' = -3 \sin t$. Alors

$$x'y'' - y'x'' = 15 \sin^2 t + 15 \cos^2 t = 15 \text{ et } x'^2 + y'^2 = 25 \sin^2 t + 9 \cos^2 t.$$

b. En $(5, 0), t = 0 : \kappa = \frac{15}{27} = \frac{5}{9}$, donc $R = \frac{9}{5}$. En $(0, 3), t = \pi/2 : \kappa = \frac{15}{125} = \frac{3}{25}$, donc $R = \frac{25}{3}$.

La courbure est maximale aux extrémités du grand axe.

18 Réduction d'une quadrique

★★★

La matrice est $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Le vecteur $(1, 1, 0)$ est propre pour 3, $(1, -1, 0)$ pour -1 et $(0, 0, 1)$ pour -2.

Avec $u = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$, $v = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$, $w = z$: $3u^2 - v^2 - 2w^2 = 6$, soit $\frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{6} - \frac{w^2}{3} = 1$.

Un signe positif et deux négatifs avec second membre positif : hyperboloïde à deux nappes, d'axe la droite dirigée par $(1, 1, 0)$. Les sommets sont $u = \pm\sqrt{2}$, c'est-à-dire $\pm(1, 1, 0)$: on vérifie $1 + 1 + 4 = 6$.

19 Symétrie glissée

★★★

a. La partie linéaire est $U = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. On a $U^T U = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = I$ et $\det U = \frac{-9-16}{25} = -1$: antidéplacement.

b. Un point fixe vérifierait $2x - 4y = 15$ (première coordonnée) et $-4x + 8y = 20$, soit $2x - 4y = -10$: contradiction. Il n'y a pas de point fixe, donc f est une symétrie glissée, non une réflexion.

c. La direction de l'axe est $\ker(U - I)$, engendré par $(2, 1)$. On décompose $b = (3, 4) = (4, 2) + (-1, 2)$ avec $(4, 2)$ colinéaire à $(2, 1)$ et $(-1, 2)$ orthogonal. Le vecteur de glissement est $(4, 2)$, de norme $2\sqrt{5}$, et l'axe est la droite $x - 2y = -\frac{5}{2}$.

20 Rotation dans l'espace



a. f permute les coordonnées : $\|f(v)\|^2 = z^2 + x^2 + y^2 = \|v\|^2$. Sa matrice

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice de permutation cyclique, orthogonale, de déterminant +1.

b. L'axe est $\ker(f - \text{id}) : z = x, x = y, y = z$, donc la droite dirigée par $(1, 1, 1)$. La trace vaut 0, donc $1 + 2 \cos \theta = 0$, $\cos \theta = -\frac{1}{2}$: l'angle est $\frac{2\pi}{3}$ (au signe près selon l'orientation de l'axe).

21 Plan tangent et distance à l'origine



a. $1 + 2 + 3 = 6$: A est sur la surface. Avec $F = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6$,

$\nabla F(A) = (2, 4, 6)$. Plan tangent : $2(x - 1) + 4(y - 1) + 6(z - 1) = 0$, soit $x + 2y + 3z = 6$.

b. $d = \frac{|-6|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{6}{\sqrt{14}} \approx 1,60$.

22 Nappe paramétrée



$\partial_u S = (1, 0, v)$ et $\partial_v S = (0, 1, u)$. Leur produit vectoriel est

$(0 \cdot u - v \cdot 1, v \cdot 0 - 1 \cdot u, 1) = (-v, -u, 1)$, jamais nul.

En $(1, 2)$: le point est $(1, 2, 2)$ et la normale $(-2, -1, 1)$. Plan :

$-2(x - 1) - (y - 2) + (z - 2) = 0$, soit $z = 2x + y - 2$.

Avec le graphe $z = xy$: $f_x = y = 2$, $f_y = x = 1$, d'où

$z = 2 + 2(x - 1) + (y - 2) = 2x + y - 2$. Les deux méthodes concordent.

Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Courbes, surfaces et géométrie euclidienne : exercices de maths Maths Spé

QCM de maths

Courbes, surfaces et géométrie euclidienne : QCM de maths Maths Spé

Contrôles de maths

Courbes, surfaces et géométrie euclidienne : contrôle de maths Maths Spé

Exercices de maths

Réduction des endomorphismes : exercices de maths Maths Spé

 Exercices de maths

Espaces euclidiens : exercices de maths
Maths Spé

 QCM de maths

Réduction des endomorphismes : QCM
de maths Maths Spé

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage