

Géométrie dans l'espace : cours de maths Terminale à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Terminale

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Un drone qui longe une façade, une grue qui déplace une charge, un toit qui s'appuie sur des poutres : tout cela se passe dans l'espace, et les coordonnées permettent de le décrire avec précision. Dans ce chapitre, tu vas apprendre à **calculer** avec les vecteurs de l'espace, à décrire droites et plans par des équations, puis à mesurer angles et distances grâce au **produit scalaire**.

1. Vecteurs de l'espace et coplanarité

Les vecteurs de l'espace se manipulent comme ceux du plan, avec une coordonnée de plus. Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$. Deux vecteurs sont **colinéaires** si l'un est un multiple de l'autre.

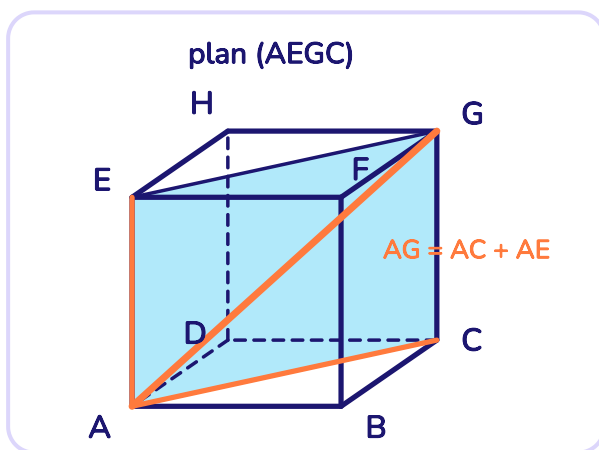
D Vecteurs coplanaires

Des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont **coplanaires** si leurs représentants d'origine un même point O sont tous dans un même plan.

P Caractérisation

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $\vec{w}$ est coplanaire avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement s'il existe deux réels a et b tels que

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}.$$



Dans le cube ci-dessus, $\vec{AG} = \vec{AC} + \vec{AE}$: les vecteurs $\vec{AG}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AE}$ sont coplanaires, ce qui signifie que les points A , C , G , E sont dans un même plan.

E

Exemple 1

Soient $A(1; 0; 2)$, $B(3; 1; 1)$, $C(0; 2; 3)$. On a $\overrightarrow{AB}(2; 1; -1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1; 2; 1)$, qui ne sont pas colinéaires.

Pour $D(6; 0; -1)$: $\overrightarrow{AD}(5; 0; -3) = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, donc A, B, C, D sont coplanaires.

Pour $E(2; 2; 2)$: $\overrightarrow{AE}(1; 2; 0) = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ donnerait $2a - b = 1$, $a + 2b = 2$ et $-a + b = 0$. Les deux dernières équations imposent $a = b$, puis $3a = 2$, soit $a = b = \frac{2}{3}$, alors que la première donne $2a - b = a = 1$: contradiction, donc E n'est pas dans le plan (ABC) .

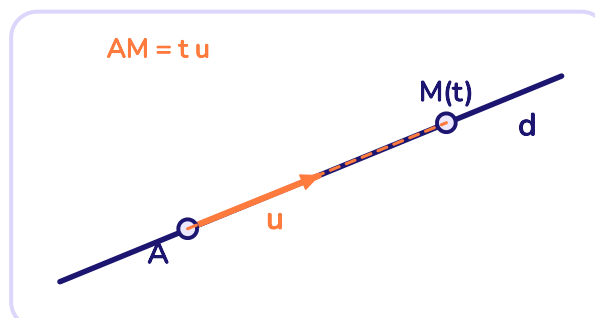
2. Représentations paramétriques d'une droite

P

Représentation paramétrique

La droite d passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$ non nul est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$



E

Exemple 2

Droite (AB) avec $A(1; 2; -1)$ et $B(4; 0; 2)$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}(3; -2; 3)$ dirige la droite, donc $x = 1 + 3t$, $y = 2 - 2t$, $z = -1 + 3t$.

Le point $C(7; -2; 5)$ correspond à $t = 2$ pour les trois équations : il appartient à la droite. Le point $D(-2; 4; -3)$ donne $t = -1$ avec x et y , mais $z = -1 - 3 = -4 \neq -3$: il n'y appartient pas.



Piège

Une représentation paramétrique n'est pas unique : on peut changer de point de départ ou multiplier le vecteur directeur par un réel non nul. Pour savoir si un point est sur la droite, il faut que **la même valeur de t** convienne pour les trois coordonnées.

3. Produit scalaire dans l'espace

D

Produit scalaire et norme

Dans un repère orthonormé, pour $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz', \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$ où θ est l'angle géométrique des deux vecteurs.

Le produit scalaire est symétrique et se développe comme un produit :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \text{ et } (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}). \text{ On en tire } \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2.$$

E**Exemple 3**

Pour $\vec{u}(1; 2; 2)$ et $\vec{v}(2; -1; 2)$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 - 2 + 4 = 4$ et $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 3$. Alors $\cos \theta = \frac{4}{9}$, d'où $\theta \approx 63,6^\circ$.

4. Orthogonalité**P****Critère d'orthogonalité**

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Deux droites sont orthogonales si leurs vecteurs directeurs le sont. Une droite est **orthogonale à un plan** si elle est orthogonale à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

E**Exemple 4**

Les vecteurs $\vec{u}(2; -1; 3)$ et $\vec{v}(1; 5; 1)$ vérifient $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 - 5 + 3 = 0$: ils sont orthogonaux.

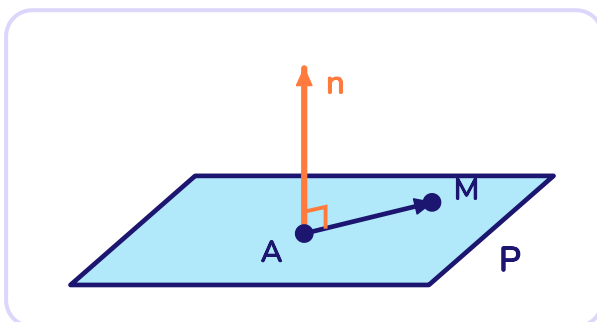
⚠**Piège**

Dans l'espace, deux droites **orthogonales** ne sont pas forcément **perpendiculaires** : elles peuvent ne pas se couper. Les arêtes (AB) et (EH) d'un cube sont orthogonales, mais n'ont aucun point commun.

5. Vecteur normal et équation cartésienne d'un plan

D Vecteur normal

Un vecteur non nul $\vec{n}$ est **normal** à un plan P s'il est orthogonal à tous les vecteurs de P , c'est-à-dire à deux vecteurs non colinéaires de P .



P Équation cartésienne

Le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ est l'ensemble des points M tels que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$. Il admet une équation de la forme

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Réciproquement, toute équation de cette forme avec $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ est celle d'un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

M

Plan défini par trois points non alignés

1. Calcule deux vecteurs, par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Cherche $\vec{n}(a; b; c)$ tel que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$: un système de deux équations à trois inconnues, où l'on fixe une valeur simple.
3. Écris $ax + by + cz + d = 0$, puis trouve d avec les coordonnées de A .
4. Vérifie avec B et C .

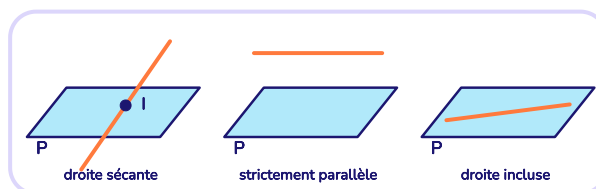
E

Exemple 5

Avec $A(1; 0; 2)$, $B(3; 1; 1)$, $C(0; 2; 3)$: $\overrightarrow{AB}(2; 1; -1)$, $\overrightarrow{AC}(-1; 2; 1)$. Le système $2a + b - c = 0$ et $-a + 2b + c = 0$ donne, en additionnant, $a + 3b = 0$. Avec $b = -1$: $a = 3$ et $c = 2a + b = 5$, soit $\vec{n}(3; -1; 5)$.

Le plan a pour équation $3x - y + 5z + d = 0$. Avec A : $3 + 10 + d = 0$, donc $d = -13$ et (ABC) : $3x - y + 5z - 13 = 0$. Contrôle avec B : $9 - 1 + 5 - 13 = 0$.

6. Positions relatives de droites et de plans



Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et P un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

Situation	Condition	Conclusion
d et P	$\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$	sécants en un unique point
d et P	$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$	d parallèle à P : incluse si un point de d est dans P , strictement parallèle sinon
P et P'	et colinéaires	parallèles : confondus ou strictement parallèles
P et P'	non colinéaires	sécants selon une droite

E

Exemple 6

Soit $d : x = 1 + 2t, y = -t, z = 3 + t$ et $Q : x + 2y + z - 8 = 0$. Comme $\vec{u}(2; -1; 1) \cdot \vec{n}(1; 2; 1) = 1 \neq 0$, la droite coupe le plan. On remplace : $(1 + 2t) + 2(-t) + (3 + t) - 8 = t - 4 = 0$, donc $t = 4$ et le point d'intersection est $(9; -4; 7)$.



Piège

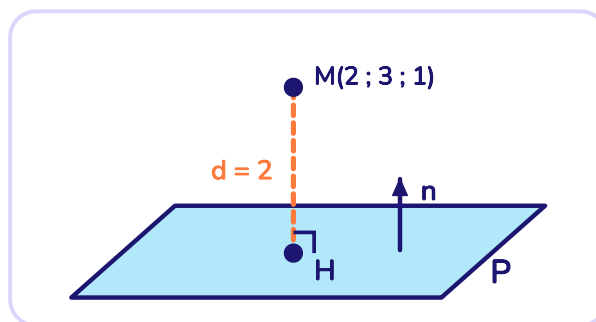
Quand $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, ne conclus pas « parallèle » trop vite : il reste à tester un point de la droite dans l'équation du plan pour savoir si elle est incluse.

7. Distance d'un point à un plan

P Distance et projeté orthogonal

Pour le plan $P : ax + by + cz + d = 0$ et le point $M(x_0 ; y_0 ; z_0)$, la distance de M à P est la longueur MH , où H est le projeté orthogonal de M sur P , et

$$d(M, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$



Pour trouver H , on écrit que $\overrightarrow{MH}$ est colinéaire à $\vec{n}$, puis que H est dans P : on obtient la droite passant par M et dirigée par $\vec{n}$, puis son intersection avec P .

E Exemple 7

Soit $P : 2x - 2y + z - 5 = 0$ et $M(2 ; 3 ; 1)$. Alors $2 \times 2 - 2 \times 3 + 1 - 5 = -6$ et $\sqrt{4 + 4 + 1} = 3$, donc $d(M, P) = \frac{6}{3} = 2$.

La droite $(MH) : x = 2 + 2t, y = 3 - 2t, z = 1 + t$. Dans P :

$$2(2 + 2t) - 2(3 - 2t) + (1 + t) - 5 = 9t - 6 = 0, \text{ donc } t = \frac{2}{3} \text{ et } H\left(\frac{10}{3} ; \frac{5}{3} ; \frac{5}{3}\right).$$



Astuce de Zyro

Sur ma planète, on vérifie toujours un projeté en deux temps : est-il dans le plan ? Le vecteur $\overrightarrow{MH}$ est-il colinéaire au vecteur normal ? Si les deux réponses sont oui, c'est gagné !

À retenir

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, $\vec{w}$ leur est coplanaire $\iff \vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.
- Droite : $x = x_A + ta, y = y_A + tb, z = z_A + tc$, avec $\vec{u}(a; b; c)$ vecteur directeur.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$; $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$; $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$.
- Plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$: $ax + by + cz + d = 0$.
- Droite et plan : $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$ sécants, $= 0$ parallèles ou incluse. Deux plans : normaux colinéaires ou non.
- $d(M, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Le livre de cours de maths Terminale

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de Terminale

[Changer de niveau](#)

Niveau : **Terminale**

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi



Zyro te conseille la suite



Exercices de maths

Géométrie dans l'espace : exercices de maths Terminale



Contrôles de maths

Géométrie dans l'espace : contrôle de maths Terminale



QCM de maths



Exercices de maths

Géométrie dans l'espace : QCM de maths
Terminale

Combinatoire et dénombrement :
exercices de maths Terminale



Exercices de maths

Probabilités conditionnelles et
indépendance : exercices de maths
Terminale



Contrôles de maths

Combinatoire et dénombrement :
contrôle de maths Terminale

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage