

Fonctions holomorphes : cours de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 101 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

En analyse réelle, être dérivable est une propriété modeste. En analyse complexe, la même définition, appliquée à une variable qui se déplace dans un plan, impose une rigidité spectaculaire : une fonction dérivable une fois l'est une infinité de fois, se développe en série entière, et se laisse reconstruire à l'intérieur d'une courbe à partir de ses seules valeurs sur cette courbe. Ce chapitre présente les **fonctions holomorphes** et leurs théorèmes fondateurs.

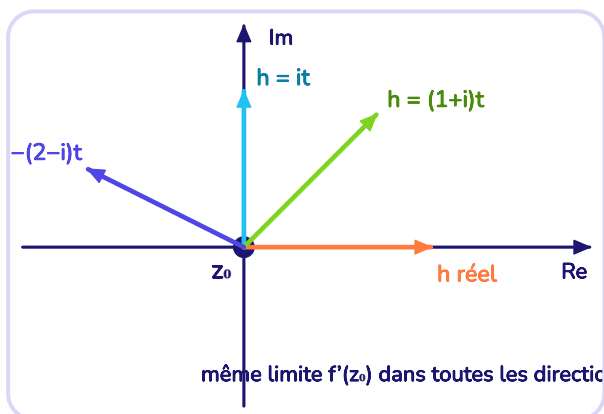
1. Dérivabilité complexe

D Dérivabilité au sens complexe

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ et $z_0 \in U$. On dit que f est **$\mathbb{C}$ -dérivable** en z_0 si le quotient $\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$ admet une limite dans $\mathbb{C}$ quand $h \rightarrow 0$ (avec $h \in \mathbb{C}^*$).

Cette limite est notée $f'(z_0)$. La fonction est **holomorphe sur U** si elle est $\mathbb{C}$ -dérivable en tout point de U .

Le point crucial est que h peut tendre vers 0 selon **toutes les directions du plan**, et la limite doit être la même partout. Les règles usuelles (somme, produit, quotient, composée) subsistent : polynômes, fractions rationnelles, **exp, sin, cos** sont holomorphes là où ils sont définis.



E Exemple 1 : la fonction cube

Pour $f(z) = z^3$: $\frac{(z+h)^3 - z^3}{h} = 3z^2 + 3zh + h^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 3z^2$. Donc f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $f'(z) = 3z^2$.



La conjugaison n'est dérivable nulle part

Pour $f(z) = \bar{z}$, le quotient vaut $\bar{h}/h$. Avec $h = t$ réel il vaut 1 , avec $h = it$ il vaut -1 : deux limites différentes, donc pas de dérivée. Une fonction très régulière au sens réel peut ne pas être holomorphe.

2. Équations de Cauchy-Riemann

Écrivons $z = x + iy$ et $f = u + iv$ avec u, v à valeurs réelles. Faisons tendre h vers 0 d'abord par valeurs réelles, puis par valeurs imaginaires pures : on obtient deux expressions de $f'(z_0)$ qui doivent coïncider.

P

Équations de Cauchy-Riemann

Si $f = u + iv$ est $\mathbb{C}$ -dérivable en $z_0 = x_0 + iy_0$, alors u et v ont des dérivées partielles en (x_0, y_0) et

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Réciproquement, si u et v sont différentiables en (x_0, y_0) (par exemple de classe C^1) et vérifient ces égalités, alors f est $\mathbb{C}$ -dérivable en z_0 .

E

Exemple 2 : vérification sur $z^2 + z$

Soit $f(x + iy) = (x^2 - y^2 + x) + i(2xy + y)$. On a $u_x = 2x + 1 = v_y$ et $u_y = -2y = -v_x$: les équations sont vérifiées partout, f est holomorphe et $f' = u_x + iv_x = 2x + 1 + 2iy = 2z + 1$. On reconnaît $f(z) = z^2 + z$.

Autre conséquence, que l'on justifiera au paragraphe 5 : u et v sont de classe C^∞ et **harmoniques**, c'est-à-dire $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (il suffit de dériver les équations de Cauchy-Riemann).

3. Séries entières

D Rayon de convergence

Pour une série entière $\sum a_n z^n$, le **rayon de convergence** est $R = \sup\{r \geq 0 : (a_n r^n) \text{ est bornée}\} \in [0, +\infty]$. La série converge absolument pour $|z| < R$.

P Somme d'une série entière

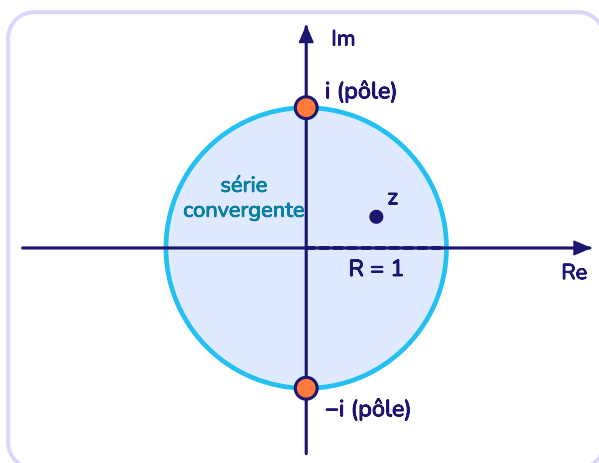
La somme $S(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est holomorphe sur le disque $D(0, R)$ et sa dérivée s'obtient terme à terme : $S'(z) = \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$, série de même rayon R .

M Calculer un rayon avec d'Alembert

1. Écris a_n et forme $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$.
2. Si ce rapport tend vers $\ell \in [0, +\infty]$, alors $R = 1/\ell$ (avec $1/0 = +\infty$ et $1/\infty = 0$).
3. Pour une série lacunaire (seulement les puissances paires, par exemple), applique d'Alembert sur $|a_{n+1} z^{n+1} / a_n z^n|$ en gardant z .

E Exemple 3 : le rayon de $\sum n z^n / 2^n$

Ici $a_n = n/2^n$ et $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2n} \rightarrow \frac{1}{2}$. Donc $R = 2$. La série converge pour $|z| < 2$ et diverge pour $|z| > 2$.



La figure ci-dessus illustre un fait général : le rayon de convergence du développement en 0 d'une fonction holomorphe est au moins la distance de 0 au bord du domaine d'holomorphie. Pour $\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n z^{2n}$, les points singuliers $\pm i$ sont à distance 1 de l'origine, d'où $R = 1$, alors même que la fonction est parfaitement régulière sur la droite réelle.

4. Théorème de Cauchy

D Intégrale curviligne

Si $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ est de classe C^1 par morceaux et f continue sur son image,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt. \text{ Un lacet est un chemin fermé : } \gamma(\alpha) = \gamma(\beta).$$

P

Théorème de Cauchy

Soit U un ouvert étoilé (un disque, un demi-plan, un convexe...) et f holomorphe sur U . Alors f admet une primitive sur U et, pour tout lacet γ de U , $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$.

L'idée de la preuve est de la montrer d'abord pour un triangle (lemme de Goursat), puis de construire la primitive $F(z) = \int_{[a,z]} f$ sur un ouvert étoilé de centre a .

E

Exemple 4 : l'hypothèse « étoilé » est indispensable

Sur le cercle $|z| = 1$, paramétré par $z = e^{it}$, on a $dz = ie^{it} dt$. Alors

$\oint z^2 dz = i \int_0^{2\pi} e^{3it} dt = 0$ conformément au théorème, alors que

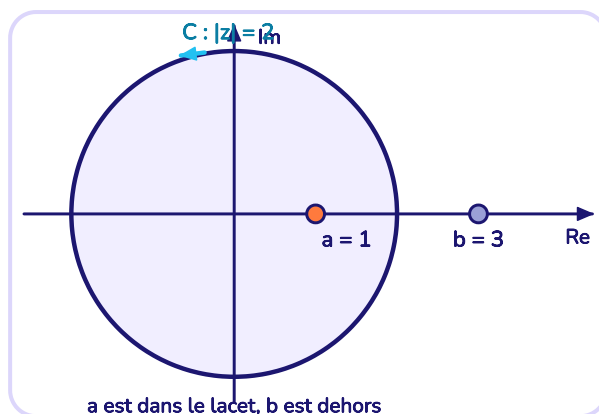
$\oint \frac{dz}{z} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i \neq 0$. La fonction $1/z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$, mais $\mathbb{C}^*$ n'est pas étoilé : elle n'y possède pas de primitive.

5. Formule de Cauchy

P

Formule intégrale de Cauchy

Soit f holomorphe sur un ouvert U contenant le disque fermé $\overline{D}(a, r)$, et C le cercle $|w - a| = r$ parcouru une fois dans le sens direct. Pour tout z avec $|z - a| < r$



Les valeurs de f à l'intérieur sont donc entièrement déterminées par celles du bord. On en déduit que f est indéfiniment dérivable, **analytique** (somme de sa série de Taylor sur tout disque contenu dans U), et que si $|f| \leq M$ sur C alors les **inégalités de Cauchy** $|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n! M}{r^n}$ sont vraies.

E Exemple 5 : un pôle simple dans le lacet

Avec $C : |z| = 2$ et $f(z) = z^2 + 3z$ holomorphe sur $\mathbb{C}$:

$\oint_C \frac{z^2 + 3z}{z - 1} dz = 2i\pi f(1) = 2i\pi \times 4 = 8i\pi$, puisque 1 est dans le disque. La même intégrale avec $z - 3$ au dénominateur (point hors du disque) donnerait 0 par le théorème de Cauchy.

E Exemple 6 : une dérivée seconde

Soit $C : |z| = 3$. Alors $\oint_C \frac{\cos z}{(z - i)^3} dz = \frac{2i\pi}{2!} (\cos)''(i) = -i\pi \cos(i) = -i\pi \cosh 1$.

6. Théorème de Liouville

P Théorème de Liouville

Toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier (fonction **entière**) et bornée est constante.

Preuve. Si $|f| \leq M$ sur $\mathbb{C}$, l'inégalité de Cauchy à l'ordre 1 donne $|f'(a)| \leq M/r$ pour tout $r > 0$. En faisant $r \rightarrow +\infty$, $f'(a) = 0$ pour tout a : f est constante.

! Astuce de Zyro

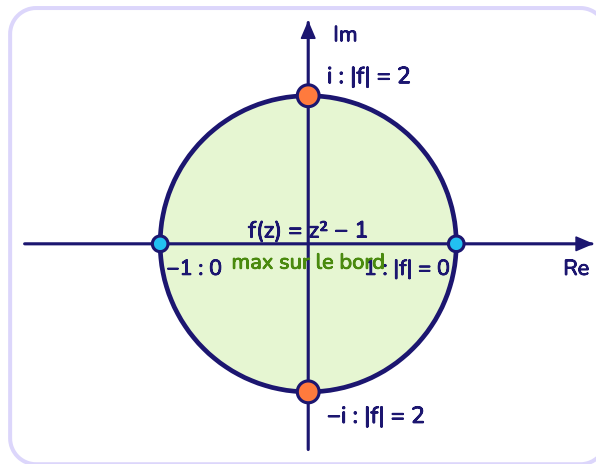
Pour prouver qu'une fonction entière est constante, cherche une fonction auxiliaire bornée : l'exponentielle e^{-f} ou l'inverse $1/f$ fait souvent l'affaire.

Conséquence : théorème de d'Alembert-Gauss. Si un polynôme non constant P n'avait aucune racine, $1/P$ serait entière et tendrait vers 0 à l'infini, donc bornée, donc constante : absurde. Tout polynôme non constant possède donc une racine complexe.

7. Principe du maximum

P Principe du maximum

Soit U un ouvert **connexe** et f holomorphe non constante sur U . Alors $|f|$ n'admet aucun maximum local en un point de U . Si K est un compact, f continue sur K et holomorphe sur l'intérieur de K , le maximum de $|f|$ sur K est atteint sur la frontière de K .



E Exemple 7 : maximum sur un disque

Sur $|z| \leq 1$, cherchons le maximum de $|z^2 + 2z|$. On a $|z^2 + 2z| = |z| |z + 2| \leq 1 \times 3 = 3$ avec égalité si et seulement si $|z| = 1$ et $z + 2$ est de module 3, c'est-à-dire $z = 1$. Le maximum vaut donc 3 et il est atteint au bord, comme annoncé.

Le principe du minimum s'en déduit : si f ne s'annule pas, on applique le principe du maximum à $1/f$.

I 8. Zéros isolés et prolongement analytique

P Zéros isolés

Soit f holomorphe sur un ouvert connexe U , non identiquement nulle. Tout zéro a de f est isolé et d'ordre fini : il existe un entier $m \geq 1$ et g holomorphe avec $g(a) \neq 0$ telle que $f(z) = (z - a)^m g(z)$ près de a .

P**Principe des zéros isolés (prolongement analytique)**

Si deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe U coïncident sur une partie de U possédant un point d'accumulation dans U , alors elles sont égales sur U .

E**Exemple 8 : ordre d'un zéro**

Pour $f(z) = z - \sin z = \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \dots = z^3 \left(\frac{1}{6} - \frac{z^2}{120} + \dots \right)$, 0 est un zéro d'ordre **3**. Autre usage : si f est entière et $f(x) = x^2$ pour tout réel x , alors $f(z) = z^2$ sur $\mathbb{C}$, car $f(z) - z^2$ s'annule sur $\mathbb{R}$, qui a des points d'accumulation.

A**Connexité obligatoire**

Sur un ouvert non connexe, la conclusion tombe en défaut : on peut valoir **0** sur un morceau et **1** sur l'autre. De même, $\sin(1/z)$ a des zéros $1/(k\pi)$ qui s'accumulent en **0**, mais cette fonction n'est pas holomorphe en **0** : le point d'accumulation doit être dans le domaine.

À retenir

- f est holomorphe si le quotient différentiel a une limite quand $h \rightarrow 0$ dans $\mathbb{C}$; cela équivaut (avec C^1) aux équations de Cauchy-Riemann $u_x = v_y, u_y = -v_x$.
- Une série entière est holomorphe sur son disque de convergence et se dérive terme à terme.
- Cauchy : $\oint_{\gamma} f = 0$ sur un ouvert étoilé ; formule $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \oint \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$.
- Holomorphe implique analytique, et inégalités de Cauchy $|f^{(n)}(a)| \leq n!M/r^n$.
- Liouville : entière bornée implique constante ; d'où d'Alembert-Gauss.
- Principe du maximum : pas de maximum local de $|f|$ à l'intérieur d'un domaine si f est non constante.
- Zéros isolés d'ordre fini ; deux fonctions holomorphes égales sur un ensemble ayant un point d'accumulation dans le domaine connexe sont égales.

Le livre de cours de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 101 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

 **Zyro te conseille la suite**

 Exercices de maths

Fonctions holomorphes : exercices de maths Licence L3

 Contrôles de maths

Fonctions holomorphes : contrôle de maths Licence L3

 QCM de maths

Fonctions holomorphes : QCM de maths Licence L3

 Exercices de maths

Singularités et théorème des résidus : exercices de maths Licence L3

 Exercices de maths

Réduction des endomorphismes : exercices de maths Licence L3

 Contrôles de maths

Singularités et théorème des résidus : contrôle de maths Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage