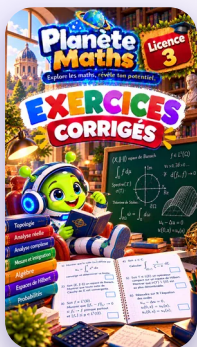


Fonctions holomorphes : exercices corrigés de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Dérivée de z^2 par la définition



$$\frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \frac{2zh + h^2}{h} = 2z + h.$$
 Quand $h \rightarrow 0$, ce quotient tend vers $2z$, quelle que soit la direction : f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $f'(z) = 2z$.

Ainsi $f'(1+2i) = 2(1+2i) = 2+4i$.

2 Cauchy-Riemann pour le cube



$u = x^3 - 3xy^2$, $v = 3x^2y - y^3$. Alors $u_x = 3x^2 - 3y^2 = v_y$ et $u_y = -6xy = -v_x$ (car $v_x = 6xy$) : les équations sont vérifiées partout, et u, v sont C^1 , donc f est holomorphe.

$f' = u_x + iv_x = 3x^2 - 3y^2 + 6ixy = 3(x+iy)^2 = 3z^2$ (on reconnaît z^3). En $1+i$: $u_x = 0$, $v_x = 6$, donc $f'(1+i) = 6i$. Contrôle : $3(1+i)^2 = 3 \times 2i = 6i$.

3 La conjugaison



$u(x, y) = x, v(x, y) = -y$. Alors $u_x = 1$ et $v_y = -1$. La première équation $u_x = v_y$ donne $1 = -1$: fausse en tout point.

Donc f n'est $\mathbb{C}$ -dérivable en aucun point, bien que u et v soient très régulières.

4 Trois rayons de convergence



a) $|a_{n+1}/a_n| = 2$, donc $R = 1/2$.

b) $|a_{n+1}/a_n| = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$, donc $R = +\infty$: c'est la série de l'exponentielle.

c) $|a_{n+1}/a_n| = \frac{n+1}{n} \rightarrow 1$, donc $R = 1$.

5 Deux intégrales sur un cercle



$dz = 2ie^{it}dt$. Premièrement $\oint_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{2ie^{it}}{2e^{it}} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2i\pi$.

Ensuite $\oint_C z^2 dz = \int_0^{2\pi} 4e^{2it} \cdot 2ie^{it} dt = 8i \int_0^{2\pi} e^{3it} dt = 8i \left[\frac{e^{3it}}{3i} \right]_0^{2\pi} = 0$, car $e^{6i\pi} = 1$.

Cela correspond au fait que z^2 a une primitive $z^3/3$ sur $\mathbb{C}$.

6 Formule de Cauchy avec une exponentielle



Le point 1 est dans le disque $|z| < 3$ et $z \mapsto e^z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$: $I_1 = 2i\pi e^1 = 2i\pi e$.

Pour I_2 , le point 1 est en dehors du disque $|z| \leq 1/2$ et $e^z/(z-1)$ est holomorphe sur ce disque : par le théorème de Cauchy, $I_2 = 0$.

7 Vrai ou faux ?



- a) Faux : **exp** est entière et n'est pas un polynôme (sa série de Taylor est infinie).
- b) Faux : **sin** est entière et non constante, donc non bornée par Liouville. On le voit aussi avec $|\sin(iy)| = \sinh |y| \rightarrow +\infty$.
- c) Vrai : si $f' = 0$ sur un ouvert connexe, **u** et **v** ont des gradients nuls (par Cauchy-Riemann), donc sont constantes sur ce connexe.

8 Conjuguée harmonique



Il faut $v_y = u_x = e^x \cos y$, donc $v = e^x \sin y + g(x)$. Puis $v_x = -u_y = e^x \sin y$ donne $e^x \sin y + g'(x) = e^x \sin y$, soit $g' = 0$ et $g = c$ constante réelle.

Ainsi $v = e^x \sin y + c$ et $f = e^x(\cos y + i \sin y) + ic = e^z + ic$.

9 Le module au carré



$u = x^2 + y^2$, $v = 0$. Cauchy-Riemann : $u_x = 2x = v_y = 0$ et $u_y = 2y = -v_x = 0$, soit $x = y = 0$. Ailleurs la condition nécessaire est fausse, donc pas de dérivabilité complexe.

En 0, $\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|h|^2}{h} = \bar{h} \rightarrow 0$: **f** est $\mathbb{C}$ -dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$. Mais être holomorphe suppose la dérivabilité sur un **ouvert** : aucun ouvert ne convient, donc **f** n'est holomorphe nulle part.

10 Développement de $1/(1+z^2)$



Avec $\frac{1}{1-w} = \sum w^n$ pour $|w| < 1$ et $w = -z^2$: $f(z) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n z^{2n}$ pour $|z| < 1$. Le rayon est 1 : à $|z| = 1$ les termes ne tendent pas vers 0, et les points $\pm i$ sont des singularités.

Le coefficient de z^4 est $(-1)^2 = 1$ et vaut $f^{(4)}(0)/4!$, d'où $f^{(4)}(0) = 24$.

11 Intégrales de $1/(z^2+1)$



Pour $|z| = 2$: les deux pôles $\pm i$ sont dans le disque. $\oint \frac{dz}{z \mp i} = 2i\pi$ (formule de Cauchy avec $f = 1$), donc l'intégrale vaut $\frac{1}{2i}(2i\pi - 2i\pi) = 0$.

Pour $|z - i| = 1/2$: seul i est dans le disque. On a $\oint \frac{dz}{z - i} = 2i\pi$ et $\oint \frac{dz}{z + i} = 0$ (Cauchy, $-i$ à l'extérieur). Résultat : $\frac{1}{2i} \times 2i\pi = \pi$.

12 Dérivée seconde par Cauchy



Formule de Cauchy à l'ordre $n = 2$ avec $f = \cos$ et $a = 0$: $\oint \frac{f(z)}{z^3} dz = \frac{2i\pi}{2!} f''(0)$. Comme $f'' = -\cos$, $f''(0) = -1$, donc l'intégrale vaut $-i\pi$.

13 Croissance au plus affine



Inégalité de Cauchy en 0 sur le cercle de rayon R , où $M(R) \leq 5 + 3R$:

$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!(5 + 3R)}{R^n}$. Pour $n \geq 2$ le membre de droite tend vers 0 quand $R \rightarrow \infty$, donc $f^{(n)}(0) = 0$.

Comme f est la somme de sa série de Taylor sur $\mathbb{C}$, $f(z) = f(0) + f'(0)z$. Pour $n = 1$:

$|f'(0)| \leq \frac{5 + 3R}{R} \rightarrow 3$, d'où $|\beta| \leq 3$.

14 Zéros de $\sin$ et ordre de $z - \sin z$



a) $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \iff e^{2iz} = 1 \iff z \in \pi\mathbb{Z}$. En $k\pi$,

$\sin'(k\pi) = \cos(k\pi) = \pm 1 \neq 0$: tous ces zéros sont simples (ordre 1) et isolés.

b) $z - \sin z = \frac{z^3}{6} - \frac{z^5}{120} + \dots$: les dérivées d'ordre $0, 1, 2$ en 0 sont nulles et la troisième vaut $1 \neq 0$. L'ordre est 3 .

15 Maximum sur un disque

★★★★

- a) $|z^2 - 1| \leq |z|^2 + 1 \leq 2$, avec égalité si et seulement si $|z| = 1$ et z^2 est un réel négatif, soit $z^2 = -1$: $z = \pm i$. Le maximum vaut 2, atteint en $\pm i$, sur le bord, comme prévu.
- b) $|e^{x+iy}| = e^x \leq e^{|z|} \leq e^2$, avec égalité pour $x = 2, y = 0$: maximum e^2 atteint en $z = 2$ (au bord).

16 Module constant sur le bord

★★★★

Principe du maximum : $|f| \leq 1$ sur le disque (le max est sur le bord où $|f| = 1$). Comme f ne s'annule pas, $1/f$ est holomorphe sur $D(0, 1)$, continue sur le disque fermé, de module 1 au bord : $|1/f| \leq 1$, donc $|f| \geq 1$.

Ainsi $|f| = 1$ partout. Un point intérieur serait alors un maximum local de $|f|$: par le principe du maximum, f est constante.

17 Zéros qui s'accumulent

★★★★

- a) La suite $1/n$ tend vers 0 et, par continuité, $f(0) = 0$: 0 est un zéro non isolé. Comme $\mathbb{C}$ est connexe, $f \equiv 0$.
- b) Non. Posons $g(z) = f(z) - z$: elle est nulle en $1/(2k)$ pour $k \geq 1$, ensemble qui s'accumule en $0 \in D(0, 1)$, donc $g \equiv 0$ et $f(z) = z$. Mais alors $f(1/3) = 1/3 \neq -1/3$: contradiction.

18 Intégrale avec trois termes

★★★

On cherche $\frac{1}{z^2(z-2)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z-2}$. En $z = 0$: $-2B = 1$, $B = -\frac{1}{2}$. En $z = 2$: $4C = 1$, $C = \frac{1}{4}$. Le coefficient de z^2 donne $A + C = 0$, $A = -\frac{1}{4}$.

Les points 0 et 2 sont dans le disque. Par Cauchy : $\oint \frac{e^z}{z} = 2i\pi$, $\oint \frac{e^z}{z^2} = 2i\pi(e^z)'(0) = 2i\pi$, $\oint \frac{e^z}{z-2} = 2i\pi e^2$.

Total : $2i\pi \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{e^2}{4} \right) = \frac{i\pi(e^2 - 3)}{2} \approx 6,90i$.

19 Partie réelle positive

★★★

Posons $g = e^{-f}$: elle est entière et $|g| = e^{-\operatorname{Re} f} \leq 1$, donc bornée. Par Liouville g est constante.

Alors $0 = g' = -f'e^{-f}$; comme $e^{-f} \neq 0$, $f' = 0$ sur $\mathbb{C}$ connexe, et f est constante.

20 Module constant

★★★

Si $c = 0$, $f = 0$. Sinon, dériver $u^2 + v^2 = c^2$ par rapport à x et y donne $uu_x + vv_x = 0$ et $uu_y + vv_y = 0$. Avec Cauchy-Riemann ($u_y = -v_x$, $v_y = u_x$) la seconde devient $-uv_x + vu_x = 0$.

Le système en (u_x, v_x) , de matrice $\begin{pmatrix} u & v \\ v & -u \end{pmatrix}$ et de déterminant $-(u^2 + v^2) = -c^2 \neq 0$, n'a que la solution nulle : $u_x = v_x = 0$, donc $f' = 0$ et f est constante sur le connexe U .

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Fonctions holomorphes : exercices de maths Licence L3

QCM de maths

Fonctions holomorphes : QCM de maths Licence L3

Contrôles de maths

Fonctions holomorphes : contrôle de maths Licence L3

Exercices de maths

Singularités et théorème des résidus : exercices de maths Licence L3

 Exercices de maths

Réduction des endomorphismes :
exercices de maths Licence L3

 QCM de maths

Singularités et théorème des résidus :
QCM de maths Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage