

Fonction exponentielle : cours de maths Terminale à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Terminale

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Un capital qui grossit avec les intérêts, une population de bactéries, un café qui refroidit, un médicament qui s'élimine : tous ces phénomènes ont un point commun, leur **vitesse de variation est proportionnelle à leur valeur**. Une seule fonction, la **fonction exponentielle**, permet de les décrire. Dans ce chapitre, tu vas la construire, apprendre à la manier et l'étudier comme n'importe quelle fonction de Terminale.

1. Une fonction égale à sa propre dérivée

D Définition de la fonction exponentielle

Il existe une **unique** fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f' = f \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

Cette fonction s'appelle la **fonction exponentielle**, notée **exp**. L'existence est admise ; l'unicité se démontre à partir de la propriété ci-dessous.

Pour travailler avec elle, on commence par un résultat essentiel : **exp ne s'annule jamais**.

Démonstration. Posons $\varphi(x) = \exp(x) \exp(-x)$. Alors φ est dérivable et $\varphi'(x) = \exp(x) \exp(-x) - \exp(x) \exp(-x) = 0$. La fonction φ est donc constante, égale à $\varphi(0) = 1 \times 1 = 1$. Ainsi $\exp(x) \exp(-x) = 1$ pour tout réel x : le produit ne peut pas être nul, donc $\exp(x) \neq 0$, et $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

2. Propriétés algébriques

P Relation fonctionnelle

Pour tous réels a et b et tout entier relatif n :

- $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$;
- $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$;
- $\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$;
- $\exp(na) = (\exp(a))^n$.

Démonstration de la première égalité. Fixons a et posons $g(x) = \frac{\exp(a+x)}{\exp(a)}$. On a $g'(x) = \frac{\exp(a+x)}{\exp(a)} = g(x)$ et $g(0) = 1$. Par unicité, $g = \exp$, c'est-à-dire $\exp(a+x) = \exp(a) \exp(x)$.

Ces règles ressemblent aux règles des puissances. C'est pourquoi on note $e = \exp(1) \approx 2,718$ et, pour tout réel x , $\exp(x) = e^x$. Les propriétés s'écrivent alors : $e^{a+b} = e^a e^b$, $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$, $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$, $(e^a)^n = e^{na}$.

Exemple 1

Simplifier $A = \frac{e^5 (e^{-2})^3}{e^{-1}}$.

$$(e^{-2})^3 = e^{-6}, \text{ puis } A = e^5 \times e^{-6} \times e^1 = e^{5-6+1} = e^0 = 1.$$

Piège

L'exponentielle transforme une **somme** en **produit** : $e^{a+b} = e^a e^b$, et surtout pas $e^a + e^b$. De même, $e^{2x} = (e^x)^2$ et non $2e^x$.

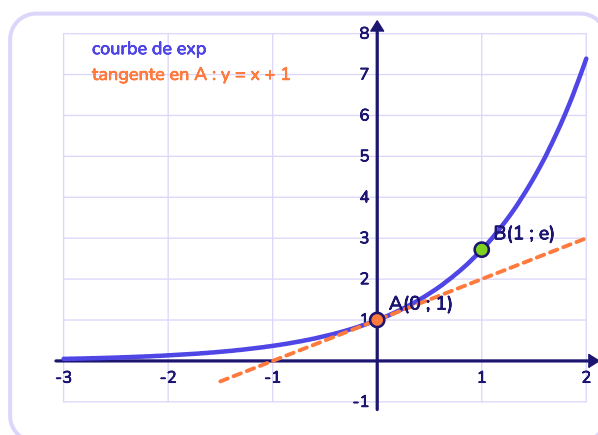
3. Étude de la fonction exponentielle

P Propriétés de exp

- Pour tout réel x , $e^x > 0$.
- La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $(e^x)' = e^x > 0$: elle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.
- $e^a = e^b \iff a = b$ et $e^a < e^b \iff a < b$. En particulier $e^x = 1 \iff x = 0$.

Pourquoi ? On a $e^x = (e^{x/2})^2$, un carré non nul : il est strictement positif. La dérivée étant positive, la fonction est strictement croissante, donc injective, d'où les équivalences. Pour les limites : on verra plus loin que $e^x \geq x + 1$, ce qui donne la limite en $+\infty$; puis $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ donne la limite en $-\infty$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
signe de $\exp'(x)$	+	+	+	
variations de exp	0 (non atteint)	1	e	$+\infty$



La courbe de $\exp$ est située **au-dessus de l'axe des abscisses**, elle passe par $A(0; 1)$ et par $B(1; e)$. L'axe des abscisses est une **asymptote horizontale** en $-\infty$. La tangente en A a pour coefficient directeur $\exp'(0) = 1$: son équation est $y = x + 1$.

E Exemple 2

Résoudre $e^{2x-3} = e^{x+4}$.

La fonction $\exp$ est injective, donc l'équation équivaut à $2x - 3 = x + 4$, soit $x = 7$.
La solution est **7**.

I 4. Dérivée de e^u

P Dérivée d'une composée

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors la fonction e^u est dérivable sur I et

$$(e^u)' = u' e^u.$$

E Exemple 3

Dériver $f(x) = e^{x^2-3x}$ et $g(x) = (x+2)e^{-x}$.

Pour f , $u(x) = x^2 - 3x$, $u'(x) = 2x - 3$: $f'(x) = (2x - 3)e^{x^2-3x}$. Comme l'exponentielle est strictement positive, le signe de $f'(x)$ est celui de $2x - 3$.

Pour g , on dérive un produit :

$$g'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+2) \times (-e^{-x}) = (1 - x - 2)e^{-x} = -(x+1)e^{-x}.$$

M**Méthode : étudier les variations**

1. Dériver la fonction ; factoriser par l'exponentielle.
2. Utiliser que $e^u > 0$: le signe de la dérivée est celui de l'autre facteur.
3. Dresser le tableau de variations et calculer les limites aux bornes.

5. Limites et croissances comparées**P****Croissances comparées**

Pour tout entier naturel $n \geq 1$:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, ce qui s'écrit aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (c'est le nombre dérivé de $\exp$ en 0).

L'exponentielle « écrase » toute puissance de x : en $+\infty$, elle croît bien plus vite ; en $-\infty$, elle tend vers 0 plus vite que n'importe quelle puissance ne tend vers l'infini.

E**Exemple 4**

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^3)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + 1)e^{-x}$.

La première est une forme indéterminée $+\infty - \infty$. On factorise :

$e^x - x^3 = e^x (1 - x^3 e^{-x})$. Comme $x^3 e^{-x} \rightarrow 0$, la parenthèse tend vers **1**, donc la limite vaut $+\infty$.

Pour la seconde : $(3x + 1)e^{-x} = 3xe^{-x} + e^{-x}$, somme de deux termes qui tendent vers **0**. La limite est **0**.

6. Équations et inéquations

Comme $\exp$ est strictement croissante, on peut « enlever » les exponentielles de part et d'autre : $e^A = e^B \iff A = B$ et $e^A \leq e^B \iff A \leq B$. Pour comparer à un nombre, on l'écrit sous forme exponentielle : $1 = e^0$.

E**Exemple 5**

Résoudre $e^{x^2} = e^{3x+4}$, puis $e^{2x-1} > 1$.

Première équation : $x^2 = 3x + 4 \iff x^2 - 3x - 4 = 0$. Le discriminant vaut $9 + 16 = 25$, les solutions sont $x = \frac{3-5}{2} = -1$ et $x = \frac{3+5}{2} = 4$.

Inéquation : $e^{2x-1} > e^0 \iff 2x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{2}$.



Astuce de Zyro

Quand tu vois e^{2x} et e^x dans la même équation, pose $X = e^x$: tu obtiens une équation du second degré en X . N'oublie pas ensuite de rejeter les valeurs de X négatives ou nulles, car e^x est toujours strictement positive !

7. Convexité de la fonction exponentielle

La dérivée seconde de $\exp$ est $\exp'' = \exp$, strictement positive. Donc **$\exp$ est convexe sur $\mathbb{R}$** et sa courbe n'a aucun point d'inflexion.

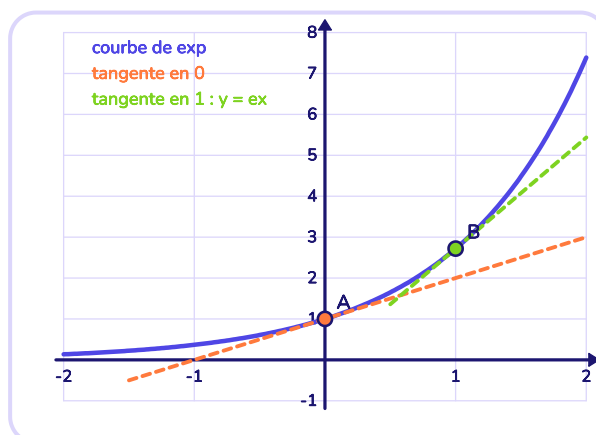


Position par rapport aux tangentes

La courbe d'une fonction convexe est située **au-dessus de chacune de ses tangentes**. Pour $\exp$, la tangente en **0** donne, pour tout réel x ,

$$e^x \geq x + 1,$$

avec égalité seulement pour $x = 0$.



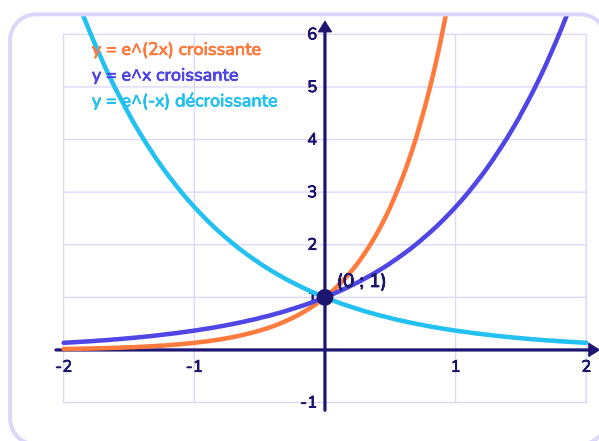
La tangente en **B** d'abscisse **1** a pour équation $y = e(x - 1) + e = ex$: elle passe par l'origine du repère, et la courbe reste au-dessus d'elle.

8. Fonctions du type $x \mapsto e^{kx}$

P Fonction $x \mapsto e^{kx}$

Soit k un réel non nul. La fonction $f : x \mapsto e^{kx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = k e^{kx}$. Le signe de f' est celui de k :

- si $k > 0$, f est strictement croissante, de limite 0 en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$;
- si $k < 0$, f est strictement décroissante, de limite $+\infty$ en $-\infty$ et 0 en $+\infty$.



Toutes ces courbes passent par le point $(0 ; 1)$. Leur tangente en ce point a pour équation $y = kx + 1$. Plus k est grand en valeur absolue, plus la courbe « décolle » ou « s'écrase » vite : c'est le modèle de la **croissance** ou de la **décroissance exponentielle**.

E Exemple 6

Une colonie compte $N(t) = 200 e^{0,25t}$ individus après t heures. Quelle est sa vitesse de croissance à l'instant $t = 0$?

$N'(t) = 200 \times 0,25 e^{0,25t} = 50 e^{0,25t}$, donc $N'(0) = 50$ individus par heure. On remarque que $N'(t) = 0,25 N(t)$: la vitesse est proportionnelle à l'effectif.

À retenir

- **exp** est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$; on note $\exp(x) = e^x$ avec $e \approx 2,718$.
- $e^{a+b} = e^a e^b$, $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$, $(e^a)^n = e^{na}$; et $e^x > 0$ pour tout x .
- exp est strictement croissante, de limites 0 en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$;
 $e^a = e^b \iff a = b$.
- $(e^u)' = u' e^u$.
- Croissances comparées : $x^n e^{-x} \rightarrow 0$ en $+\infty$ et $x^n e^x \rightarrow 0$ en $-\infty$.
- exp est convexe ; sa courbe est au-dessus de ses tangentes ; $e^x \geq x + 1$.
- $(e^{kx})' = k e^{kx}$: croissante si $k > 0$, décroissante si $k < 0$.

Le livre de cours de maths Terminale

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de Terminale

Changer de niveau

Niveau : Terminale

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi

 Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Fonction exponentielle : exercices de maths Terminale

 Contrôles de maths

Fonction exponentielle : contrôle de maths Terminale

 QCM de maths

Fonction exponentielle : QCM de maths Terminale

 Exercices de maths

Fonction logarithme népérien : exercices de maths Terminale

 Exercices de maths

 Contrôles de maths

Primitives et équations différentielles :
exercices de maths Terminale

Fonction logarithme népérien : contrôle
de maths Terminale

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage