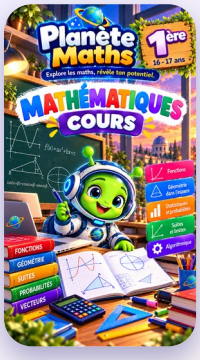
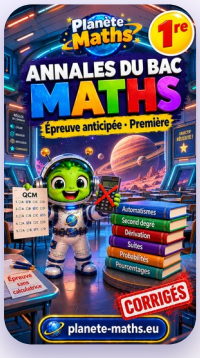
Fonction exponentielle : cours de maths 1ère à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths 1ère

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Les annales du bac de maths 1ère

Les exercices rangés par thème, tous les corrigés à la fin, dans un PDF de 200 pages.

Voir le livre

Une culture de bactéries double, puis double encore : plus il y en a, plus elle grossit vite. Ce comportement « la vitesse de variation est proportionnelle à la quantité » se retrouve en physique, en biologie, en finance. Il est décrit par une fonction étonnante : une fonction qui est **égale à sa propre dérivée**.

L'essentiel : La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ égale à sa dérivée et valant 1 en 0. Elle est strictement positive et vérifie $e^{a+b} = e^a \times e^b$. Ainsi $e^0 = 1$, $e^2 \times e^3 = e^5$, et la suite (e^n) est géométrique de raison e.

1. Une fonction égale à sa dérivée

D **Fonction exponentielle**

Il existe une **unique** fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f' = f \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

Cette fonction s'appelle la **fonction exponentielle** et se note $\exp$. On admet ici son existence et son unicité.

Cela signifie que pour tout réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$, et que la courbe passe par le point $A(0\,;\,1)$. Le nombre dérivé en 0 vaut donc $\exp'(0) = \exp(0) = 1$: la tangente en A a pour pente 1.

2. La fonction exponentielle ne s'annule jamais

P **Propriété**

Pour tout réel x, $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$. En particulier $\exp(x) \neq 0$ pour tout x.

Démonstration. Posons $\varphi(x) = \exp(x)\exp(-x)$. Cette fonction est dérivable et

$$\varphi'(x) = \exp(x)\exp(-x) + \exp(x) \times \big(-\exp(-x)\big) = 0.$$

Donc φ est constante, égale à $\varphi(0) = 1 \times 1 = 1$. Si $\exp(x)$ était nul, le produit serait nul, ce qui est impossible. □

3. Propriétés algébriques et notation e^x

P **Relation fonctionnelle**

Pour tous réels a et b et tout entier n :

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b), \qquad \exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}, \qquad \exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$$

Ces règles ressemblent à celles des puissances. On pose $e = \exp(1) \approx 2{,}718$ et on convient d'écrire, pour tout réel x,

$$\exp(x) = e^x.$$

Les règles précédentes se lisent alors comme les règles des exposants : $e^a e^b = e^{a+b}$, $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$, $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$, $(e^a)^n = e^{na}$, et $e^0 = 1$.

E **Exemple 1**

Simplifier $A = \dfrac{e^{3x+1} \times e^{-x}}{e^{x-2}}$.

On additionne les exposants du numérateur : $e^{3x+1-x} = e^{2x+1}$. Puis on soustrait celui du dénominateur : $A = e^{2x+1-(x-2)} = e^{x+3}$.

⚠ **Attention**

$e^{a+b} = e^a e^b$, mais $e^{a+b} \neq e^a + e^b$. Par exemple $e^{0+0} = 1$ alors que $e^0 + e^0 = 2$. De même $e^{2x} = (e^x)^2$, et non $2e^x$.

4. Signe et variations

P **Signe**

Pour tout réel x, $e^x > 0$.

En effet, $e^x = \left(e^{x/2}\right)^2 \geq 0$ comme carré, et $e^x \neq 0$ d'après la partie 2. Comme $\exp' = \exp > 0$, la fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $\exp'(x)$	$+$	$+$	$+$
variations de $\exp$	**croît**	1	**croît**

Conséquences : $e^a = e^b \iff a = b$ et $e^a < e^b \iff a < b$. On peut donc résoudre des équations et des inéquations en comparant les exposants. De plus $e^x > 1 \iff x > 0$ puisque $e^0 = 1$.

E **Exemple 2**

Résoudre $e^{2x-1} \leq e^{x+4}$.

La fonction exponentielle est strictement croissante : l'inéquation équivaut à $2x - 1 \leq x + 4$, c'est-à-dire $x \leq 5$. L'ensemble des solutions est $]-\infty\,;\,5]$.

5. Dérivée de $x \mapsto e^{ax+b}$

P **Propriété**

Soient a et b deux réels. La fonction $g : x \mapsto e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$g'(x) = a\,e^{ax+b}.$$

On la combine avec les formules de dérivation d'un produit et d'un quotient.

E **Exemple 3**

Dériver $f(x) = (3x-2)\,e^{-x}$.

On pose $u(x) = 3x-2$ et $v(x) = e^{-x}$, donc $u'(x) = 3$ et $v'(x) = -e^{-x}$. Alors

$$f'(x) = 3e^{-x} + (3x-2) \times (-e^{-x}) = (3 - 3x + 2)\,e^{-x} = (5-3x)\,e^{-x}.$$

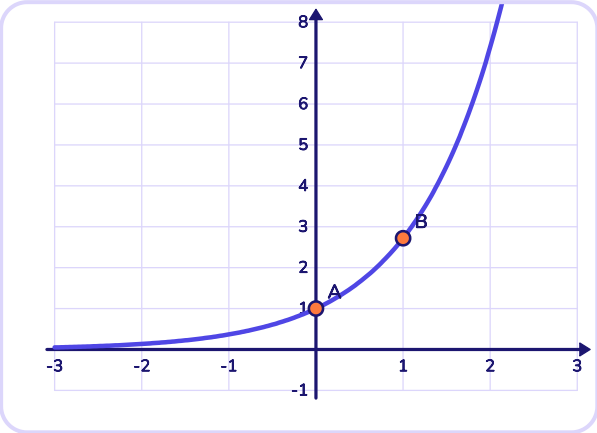
Comme $e^{-x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $5-3x$: f croît jusqu'à $x = \dfrac{5}{3}$, puis décroît.

M **Méthode : étudier une fonction avec exponentielle**

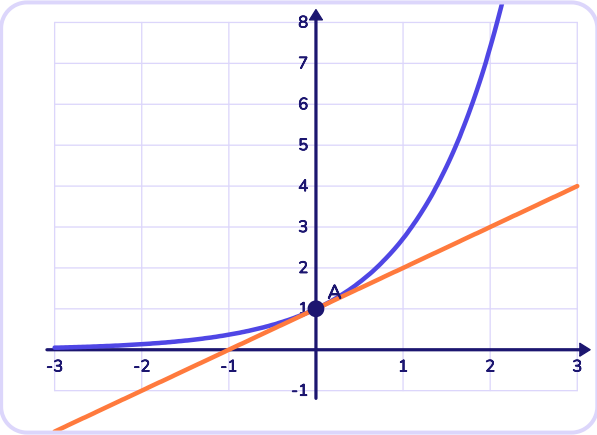
1. Calculer la dérivée et la factoriser par l'exponentielle.
2. Utiliser $e^{u} > 0$: le signe de f' est celui du facteur restant.
3. Dresser le tableau de variations et calculer les valeurs remarquables.

6. Courbe représentative

La courbe de $\exp$ est située entièrement **au-dessus de l'axe des abscisses**. Elle passe par $A(0\,;\,1)$ et $B(1\,;\,e)$, monte de plus en plus vite pour $x > 0$ et se rapproche de l'axe des abscisses quand x devient très négatif (comportement admis).

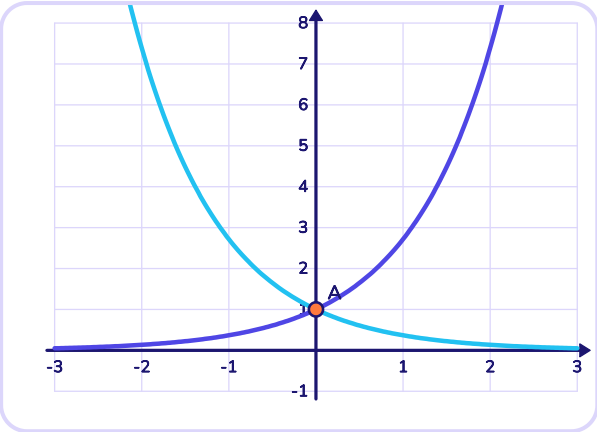


Au point d'abscisse 0, la tangente a pour équation $y = \exp'(0)(x - 0) + \exp(0)$, soit $y = x + 1$. On admet que la courbe reste au-dessus de cette tangente : $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x.



Astuce de Zyro

Sur ma planète, on reconnaît e^{-x} en retournant la courbe comme dans un miroir posé sur l'axe vertical : la courbe de $x \mapsto e^{-x}$ est la symétrique de celle de $\exp$ par rapport à l'axe des ordonnées.



7. Suites géométriques et exponentielle

Soit a un réel et $u_n = e^{an}$. Alors

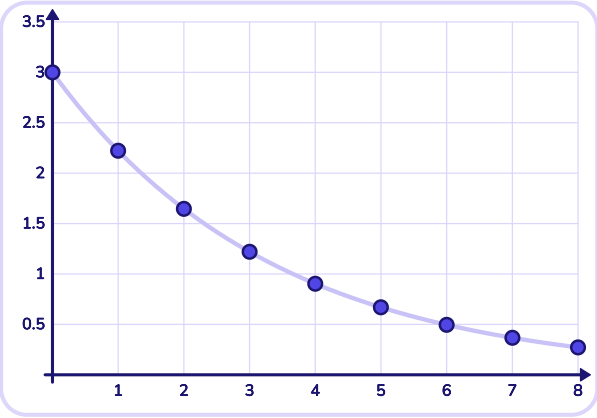
$$u_{n+1} = e^{a(n+1)} = e^{an}\, e^{a} = e^{a}\, u_n.$$

La suite (u_n) est donc **géométrique de raison e^a** et de premier terme $u_0 = 1$. Plus généralement, $u_n = C\, e^{an}$ est géométrique de raison e^a et de premier terme C.

Exemple 4

Étudier $u_n = 3e^{-0{,}3n}$.

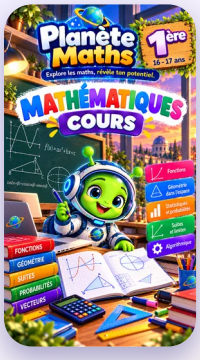
La raison est $q = e^{-0{,}3} \approx 0{,}741$ et $u_0 = 3$. Comme $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$, la suite est strictement décroissante, et ses termes se rapprochent de 0. Par exemple $u_5 = 3e^{-1{,}5} \approx 0{,}669$.



La raison e^a est supérieure à 1 si $a > 0$ (suite croissante pour $u_0 > 0$) et comprise entre 0 et 1 si $a < 0$ (suite décroissante pour $u_0 > 0$).

À retenir

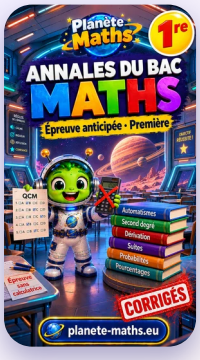
- $\exp$ est l'unique fonction dérivable vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$; on note $\exp(x) = e^x$.
- $e^{a+b} = e^a e^b$, $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$, $(e^a)^n = e^{na}$, $e^0 = 1$.
- $e^x > 0$ pour tout x ; $\exp$ est strictement croissante ; $e^a = e^b \iff a = b$.
- $(e^{ax+b})' = a\,e^{ax+b}$.
- La tangente en $A(0\,;\,1)$ est $y = x + 1$; la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses.
- (e^{an}) est une suite géométrique de raison e^a.



Le livre de cours de maths 1ère

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Les annales du bac de maths 1ère

Les exercices rangés par thème, tous les corrigés à la fin, dans un PDF de 200 pages.

Voir le livre

Entraîne-toi : défi express de 1ère

Changer de niveau

Niveau : **1ère**

6 questions au hasard, correction tout de suite.

🚀 Lancer le défi

⚡ Automatismes 1ère : combien de réponses en 60 secondes ?

60 secondes : réponds à un maximum de questions, sans réfléchir trop longtemps.

⚡ C'est parti !

🚀 Zyro te conseille la suite



✏️ **Exercices de maths**

Fonction exponentielle : exercices de maths 1ère à télécharger en PDF



📝 **Contrôles de maths**

Fonction exponentielle : contrôle de maths 1ère à télécharger en PDF



🎯 **QCM de maths**

Fonction exponentielle : QCM de maths 1ère



✏️ **Exercices de maths**

Trigonométrie : exercices de maths 1ère à télécharger en PDF



✏️ **Exercices de maths**

Produit scalaire : exercices de maths 1ère à télécharger en PDF



📝 **Contrôles de maths**

Trigonométrie : contrôle de maths 1ère à télécharger en PDF

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage