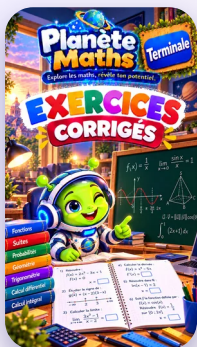


Fonction exponentielle : exercices corrigés de maths Terminale à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Terminale

Tout le programme en un seul PDF de 148 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Simplifier des expressions



$$A = e^{3+5} = e^8.$$

$$B = e^{7-2} = e^5.$$

$$C = e^{2 \times 4} = e^8.$$

$$D = e^{-3+3} = e^0 = 1.$$

$$E = e^{-(-4)} = e^4, \text{ car l'inverse de } e^{-4} \text{ est } e^4.$$

2 Vrai ou faux ?



- a) **Vrai.** L'exponentielle est toujours strictement positive.
- b) **Faux.** Avec $a = b = 0$: $e^0 = 1$ alors que $e^0 + e^0 = 2$. La bonne formule est $e^{a+b} = e^a e^b$.
- c) **Faux.** $\exp(0) = 1$ par définition.
- d) **Vrai.** C'est la propriété qui la définit : $\exp' = \exp$.
- e) **Vrai.** $e^{2x} = e^{x+x} = e^x \times e^x = (e^x)^2$.

3 Équations simples



- a) L'exponentielle est injective : $x = 5 - 2x \iff 3x = 5 \iff x = \frac{5}{3}$. Solution : $\frac{5}{3}$.
- b) $e^{3x-1} = e^0 \iff 3x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{3}$.
- c) Une exponentielle est strictement positive, elle ne peut pas valoir -2 : l'équation n'a aucune solution.

4 Dériver des exponentielles



On utilise $(e^u)' = u' e^u$.

$$f'(x) = 2e^{2x} ; g'(x) = -e^{-x} ; h'(x) = 2x e^{x^2} ; k'(x) = 3 \times 5 e^{5x} = 15 e^{5x}.$$

5 Inéquations simples



La fonction exp est strictement croissante : elle conserve l'ordre.

- a) $2x < x + 3 \iff x < 3$. Solutions : $] -\infty ; 3[$.
- b) $e^{-x} \geq e^0 \iff -x \geq 0 \iff x \leq 0$. Solutions : $] -\infty ; 0]$.
- c) $e^{4x-8} > e^0 \iff 4x - 8 > 0 \iff x > 2$. Solutions : $]2 ; +\infty[$.

6 Premières limites



- a) $e^x \rightarrow 0$ en $-\infty$, donc la limite est 4.
- b) En $+\infty$, $-x \rightarrow -\infty$ donc $e^{-x} \rightarrow 0$ et la limite est 5.
- c) $-x + 2 \rightarrow -\infty$, donc $e^{-x+2} \rightarrow 0$.
- d) $e^x \rightarrow +\infty$, donc $e^x - 7 \rightarrow +\infty$.

7 Valeurs à la calculatrice



$e^{-1} \approx 0,37$; $e^{0,5} \approx 1,65$; $e^2 \approx 7,39$; $e^{-3} \approx 0,05$.

Ordre croissant : $e^{-3} < e^{-1} < e^{0,5} < e^2$.

Cet ordre est celui des exposants $-3 < -1 < 0,5 < 2$, car la fonction exp est strictement croissante. Tous les résultats sont strictement positifs.

8 Variations de $x e^{-x}$



- a) $f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = (1 - x)e^{-x}$.
- b) $e^{-x} > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $1 - x$: positive pour $x < 1$, négative pour $x > 1$. f est croissante sur $] -\infty ; 1]$, décroissante sur $[1 ; +\infty[$, avec un maximum $f(1) = e^{-1} \approx 0,37$.
- c) En $+\infty$: $x e^{-x} \rightarrow 0$ par croissances comparées. En $-\infty$: $x \rightarrow -\infty$ et $e^{-x} \rightarrow +\infty$, donc le produit tend vers $-\infty$.

9 Une équation du second degré en e^x



- a) Comme $e^{2x} = X^2$, l'équation devient $X^2 - (1 + e)X + e = 0$.
- b) $X^2 - (1 + e)X + e = (X - 1)(X - e)$, car la somme des racines est $1 + e$ et leur produit e . Donc $X = 1$ ou $X = e$.
- c) $e^x = 1 = e^0$ donne $x = 0$; $e^x = e^1$ donne $x = 1$. Les solutions sont 0 et 1 (les deux valeurs de X sont bien strictement positives).

10 Dériver avec des produits et des quotients



$$f'(x) = 2e^x + (2x + 1)e^x = (2x + 3)e^x.$$

$$g'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \times e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

$$h'(x) = (2x - 3)e^{-x} - (x^2 - 3x)e^{-x} = (-x^2 + 5x - 3)e^{-x}.$$

11 Tangente au point d'abscisse 1



a) $\exp(1) = e$ et $\exp'(1) = e$. L'équation est $y = e(x - 1) + e = ex$.

b) Pour $x = 0$, on trouve $y = 0$: la tangente passe par O .

c) La fonction $\exp$ est convexe, donc sa courbe est au-dessus de ses tangentes : $e^x \geq ex$ pour tout x , avec égalité en $x = 1$. Sur la figure, la courbe violette ne passe jamais sous la droite en pointillés.

12 Des bactéries qui se multiplient



a) $N(0) = 500 e^0 = 500$. $N(2) = 500 e^{0,6} \approx 500 \times 1,8221 \approx 911$. Il y a environ **911** bactéries après **2** h.

b) $N'(t) = 500 \times 0,3 e^{0,3t} = 0,3 \times 500 e^{0,3t} = 0,3 N(t)$.

c) $N'(0) = 0,3 \times 500 = 150$. Au départ, la population augmente de **150** bactéries par heure.

13 Un café qui refroidit



a) $T(0) = 20 + 60 = 80$ °C.

b) $T'(t) = 60 \times (-0,1)e^{-0,1t} = -6 e^{-0,1t} < 0$: T est strictement décroissante.

c) $e^{-0,1t} \rightarrow 0$, donc $T(t) \rightarrow 20$. Le café se stabilise à la température de la pièce, **20** °C.

d) $T(10) = 20 + 60 e^{-1} \approx 20 + 22,07 \approx 42,1$ °C.

14 Croissances comparées



- a) Croissances comparées : $x^2 e^{-x} \rightarrow 0$.
- b) Croissances comparées en $-\infty$: $x e^x \rightarrow 0$.
- c) $\frac{e^x}{x^3} \rightarrow +\infty$ (l'exponentielle l'emporte sur la puissance).
- d) Forme indéterminée $+\infty - \infty$: $e^x - x = e^x (1 - x e^{-x})$. Comme $x e^{-x} \rightarrow 0$, la parenthèse tend vers 1 et la limite est $+\infty$.

15 L'inégalité fondamentale



- a) $\varphi'(x) = e^x - 1$. Or $e^x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq e^0 \iff x \geq 0$. Donc φ décroît sur $] -\infty ; 0]$, croît sur $[0 ; +\infty[$, et son minimum est $\varphi(0) = 1 - 0 - 1 = 0$.
- b) Le minimum vaut 0, donc $\varphi(x) \geq 0$, c'est-à-dire $e^x \geq x + 1$.
- c) En remplaçant x par $-x$: $e^{-x} \geq -x + 1$. Comme $x + 1 \rightarrow +\infty$ et $e^x \geq x + 1$, le théorème de comparaison donne $e^x \rightarrow +\infty$.

16 Étude complète de $(x - 1)e^x$



- a) $f'(x) = e^x + (x - 1)e^x = x e^x$. Puis $f''(x) = e^x + x e^x = (x + 1)e^x$.
- b) f' a le signe de x : f décroît sur $] -\infty ; 0]$ et croît sur $[0 ; +\infty[$, avec un minimum $f(0) = -1$. En $-\infty$: $f(x) = x e^x - e^x \rightarrow 0 - 0 = 0$. En $+\infty$: $x - 1 \rightarrow +\infty$ et $e^x \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$.
- c) f'' a le signe de $x + 1$: f est concave sur $] -\infty ; -1]$ et convexe sur $[-1 ; +\infty[$. La dérivée seconde change de signe en -1 : point d'inflexion de coordonnées $(-1 ; -2e^{-1})$, soit environ $(-1 ; -0,74)$.

17 Une équation qui a une unique solution

★★★★

- a) $g'(x) = e^x + 1 > 0$: g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- b) $g(0) = 1 + 0 - 2 = -1 < 0$ et $g(1) = e - 1 \approx 1,72 > 0$. La fonction g est continue et strictement croissante sur $[0; 1]$, elle prend la valeur 0 une seule fois (théorème des valeurs intermédiaires) : il existe un unique α tel que $g(\alpha) = 0$.
- c) $g(0,44) \approx -0,007 < 0$ et $g(0,45) \approx 0,018 > 0$. Donc $0,44 < \alpha < 0,45$.

18 La courbe en S

★★★★

- a) Avec $u = 1 + e^{-x}$, $u' = -e^{-x}$ et $f = \frac{1}{u}$: $f'(x) = -\frac{u'}{u^2} = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} > 0$. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- b) En $+\infty$, $e^{-x} \rightarrow 0$, donc $f(x) \rightarrow 1$. En $-\infty$, $e^{-x} \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow 0$. La courbe admet deux asymptotes horizontales, $y = 0$ et $y = 1$.
- c) $f(-x) = \frac{1}{1 + e^x}$. Par ailleurs $1 - f(x) = \frac{1 + e^{-x} - 1}{1 + e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$; en multipliant haut et bas par e^x , on trouve $\frac{1}{e^x + 1}$. Les deux expressions sont égales. Comme $f(0) = \frac{1}{2}$, la courbe est symétrique par rapport au point $C\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

19 Concentration d'un médicament

★★★★

- a) $C'(t) = 8e^{-0,5t} + 8t \times (-0,5)e^{-0,5t} = (8 - 4t)e^{-0,5t}$.
- b) $C'(t)$ a le signe de $8 - 4t$: positive pour $t < 2$, négative pour $t > 2$. C croît sur $[0; 2]$ puis décroît. Le maximum est $C(2) = 16e^{-1} \approx 5,89$ mg/L, atteint au bout de 2 h.
- c) $C(t) = 16 \times (0,5t)e^{-0,5t}$; en posant $X = 0,5t \rightarrow +\infty$, $Xe^{-X} \rightarrow 0$: la limite est 0. Le médicament est progressivement éliminé.
- d) $C(6) = 48e^{-3} \approx 2,39$ mg/L.

20 La famille des fonctions e^{kx}

★★★

a) $f_k(0) = 1$ et $f'_k(x) = k e^{kx}$, donc $f'_k(0) = k$. La tangente est $y = k(x - 0) + 1 = kx + 1$.

b) $2k + 1 = 7 \iff k = 3$.

c) $f_3(-1) = e^{-3} \approx 0,05 < f_1(-1) = e^{-1} \approx 0,37$, alors que $f_3(1) = e^3 \approx 20,09 > f_1(1) = e \approx 2,72$. Pour $x > 0$, le plus grand k donne la plus grande valeur ; pour $x < 0$, c'est l'inverse. Les courbes se croisent en $(0; 1)$.

d) $e^{kx} \times e^{k'x} = e^{kx+k'x} = e^{(k+k')x}$.

21 Cosinus et sinus hyperboliques

★★★

a) $\operatorname{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh}(x)$ et $\operatorname{sh}'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch}(x)$, en dérivant e^{-x} en $-e^{-x}$.

b) $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{4} = \frac{4e^x e^{-x}}{4} = 1$.

c) $\operatorname{sh}(x) > 0 \iff e^x > e^{-x} \iff x > -x \iff x > 0$. Donc ch décroît sur $] -\infty; 0]$, croît sur $[0; +\infty[$, avec un minimum $\operatorname{ch}(0) = 1$.

22 Une inéquation de degré deux en e^x

★★★

Posons $X = e^x > 0$. L'inéquation devient $X^2 - (e + e^2)X + e^3 \leq 0$.

La somme des racines est $e + e^2$ et leur produit $e \times e^2 = e^3$: le trinôme se factorise en $(X - e)(X - e^2)$.

Il est négatif entre ses racines : $e \leq X \leq e^2$, soit $e^1 \leq e^x \leq e^2$. Par croissance de $\exp$, $1 \leq x \leq 2$.

L'ensemble des solutions est $[1; 2]$.

Le livre d'exercices corrigés de maths Terminale

Tout le programme en un seul PDF de 148 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de Terminale

Changer de niveau

Niveau : **Terminale**

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi



Zyro te conseille la suite



Exercices de maths

Fonction exponentielle : exercices de maths Terminale



QCM de maths

Fonction exponentielle : QCM de maths Terminale



Contrôles de maths

Fonction exponentielle : contrôle de maths Terminale



Exercices de maths

Fonction logarithme népérien : exercices de maths Terminale



Exercices de maths

Primitives et équations différentielles : exercices de maths Terminale



QCM de maths

Fonction logarithme népérien : QCM de maths Terminale

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage