

# Espaces euclidiens : exercices de maths Maths Spé à télécharger en PDF



## Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

21 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

### 1 Produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^4$

★☆☆

Dans  $\mathbb{R}^4$  muni du produit scalaire canonique, on pose  $x = (1, -2, 3, 0)$  et  $y = (4, 1, -1, 2)$ .

- Calculer  $\langle x, y \rangle$ ,  $\|x\|$  et  $\|y\|$ .
- Vérifier l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

## 2 Est-ce un produit scalaire ?



Dire, en justifiant, si chaque application est un produit scalaire.

- a. Sur  $\mathbb{R}^2$  :  $\varphi(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$ .
- b. Sur  $\mathbb{R}^2$  :  $\psi(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1$ .
- c. Sur  $\mathbb{R}_2[X]$  :  $\chi(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$ .

## 3 Une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$



On pose  $u_1 = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$ ,  $u_2 = \frac{1}{3}(2, 1, -2)$ ,  $u_3 = \frac{1}{3}(2, -2, 1)$ .

- a. Montrer que  $(u_1, u_2, u_3)$  est une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$ .
- b. Donner les coordonnées de  $x = (3, 0, 6)$  dans cette base, puis vérifier l'égalité de Parseval.

## 4 Matrice orthogonale ou non ?



Les matrices  $A = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  sont-elles orthogonales ? Si oui, préciser la nature de l'isométrie associée.

## 5 Projeter sur une droite



Dans  $\mathbb{R}^2$  canonique, soit  $D = \text{Vect}((1, 2))$  et  $x = (3, 4)$ . Calculer le projeté orthogonal de  $x$  sur  $D$  et la distance de  $x$  à  $D$ .

## 6 Diagonaliser une matrice symétrique $2 \times 2$



Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ . Déterminer ses valeurs propres et une base orthonormée de vecteurs propres, puis écrire  $A = PDP^T$ .

## 7 Pythagore et parallélogramme



Dans un espace euclidien,  $\|x\| = 3$ ,  $\|y\| = 4$  et  $\langle x, y \rangle = -2$ . Calculer  $\|x + y\|^2$  et  $\|x - y\|^2$ , vérifier l'identité du parallélogramme, puis dire si  $x$  et  $y$  sont orthogonaux.

## 8 Gram-Schmidt dans $\mathbb{R}^3$



Orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt la famille  $v_1 = (1, 2, 0)$ ,  $v_2 = (1, 1, 1)$ ,  $v_3 = (0, 1, 2)$  de  $\mathbb{R}^3$  canonique.

## 9 Distance à un plan de $\mathbb{R}^4$



Dans  $\mathbb{R}^4$  canonique, soit  $a = (1, 1, 1, 0)$ ,  $b = (1, -1, 0, 1)$ ,  $F = \text{Vect}(a, b)$  et  $x = (2, 3, 1, 5)$ .

- Vérifier que  $a \perp b$ .
- Calculer  $p_F(x)$  puis  $d(x, F)$ .

## 10 Polynômes orthogonaux sur $[-1, 1]$



Sur  $\mathbb{R}_3[X]$ , on pose  $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$ .

- Montrer que  $1$ ,  $X$  et  $X^2 - \frac{1}{3}$  sont deux à deux orthogonaux et calculer leurs normes au carré.
- Déterminer le projeté orthogonal de  $X^3$  sur  $\mathbb{R}_2[X]$  et la distance de  $X^3$  à  $\mathbb{R}_2[X]$ .

### 11 Matrice d'une projection orthogonale



Dans  $\mathbb{R}^3$  canonique, soit  $u = (1, 2, 2)$  et  $p$  la projection orthogonale sur  $D = \text{Vect}(u)$ .

- Écrire la matrice  $P$  de  $p$  dans la base canonique.
- Vérifier que  $P^2 = P$ ,  $P^T = P$ ,  $\text{tr } P = 1$ .
- Calculer  $p(9, 0, 0)$  et la distance de  $(9, 0, 0)$  à  $D$ .

### 12 Un demi-tour dans l'espace



Avec les notations de l'exercice précédent, on pose  $S = 2P - I_3$  (symétrie orthogonale par rapport à  $D$ ).

- Calculer  $S$  et montrer qu'elle est orthogonale.
- Déterminer son déterminant et sa nature géométrique.

### 13 Une isométrie à coefficients rationnels



Soit  $M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $M$  est orthogonale, calculer son déterminant et en déduire  $M^{-1}$ .

### 14 Réflexion du plan



Dans le plan, soit  $\Delta$  la droite d'équation  $y = \sqrt{3}x$ , dirigée par  $d = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  (angle  $\frac{\pi}{3}$ ). Écrire la matrice de la réflexion  $s$  par rapport à  $\Delta$  et calculer l'image de  $x = (2, 0)$ .

### 15 Puissances d'une matrice symétrique

★★★★

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . En utilisant la décomposition spectrale, déterminer  $A^n$  pour tout entier  $n \geq 1$ , puis  $A^3$ .

### 16 Meilleure approximation affine d'une parabole

★★★★

Déterminer les réels  $a, b$  minimisant  $I(a, b) = \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$  et la valeur de ce minimum.

### 17 Produit scalaire de Frobenius

★★★★

Sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , on pose  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ .

- Montrer que c'est un produit scalaire.
- Montrer que les matrices symétriques  $\mathcal{S}_2$  et antisymétriques  $\mathcal{A}_2$  sont orthogonales.
- Calculer la distance de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  à  $\mathcal{S}_2$ .

### 18 L'opérateur de Legendre

★★★★

Sur  $\mathbb{R}_2[X]$  muni de  $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 PQ$ , on définit  $u(P) = ((X^2 - 1)P')'$ .

- Montrer que  $u$  est un endomorphisme autoadjoint (intégrer par parties).
- Déterminer ses valeurs propres et vecteurs propres, et conclure sur l'orthogonalité obtenue.

### 19 Maximum d'une forme quadratique

★★★

Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $q(x) = x^T A x$ . Déterminer le maximum et le minimum de  $q$  sur la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ , et les points où le maximum est atteint.

### 20 Axe et angle d'une rotation de l'espace

★★★

Avec la matrice  $M$  de l'exercice sur l'isométrie à coefficients rationnels ( $\det M = -1$ ), on pose  $R = -M$ .

- Montrer que  $R$  est une rotation.
- Déterminer son axe et le cosinus de son angle.

### 21 Image et noyau d'un autoadjoint

★★★

Soit  $u$  un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien  $E$ . Montrer que  $\text{Im } u = (\ker u)^\perp$ , puis que  $E = \ker u \oplus \text{Im } u$ .

#### Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

 Zyro te conseille la suite

✓ Exercices corrigés de maths

Espaces euclidiens : exercices corrigés de maths Maths Spé

■ Cours de maths

Espaces euclidiens : cours de maths Maths Spé

🎯 QCM de maths

Espaces euclidiens : QCM de maths Maths Spé

✓ Exercices corrigés de maths

Séries numériques : exercices corrigés de maths Maths Spé

✓ Exercices corrigés de maths

Suites et séries de fonctions : exercices corrigés de maths Maths Spé

■ Cours de maths

Séries numériques : cours de maths Maths Spé

## Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage