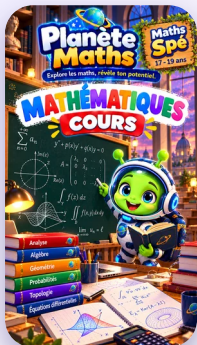


Espaces euclidiens : cours de maths Maths Spé à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Un espace euclidien est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire. On y mesure longueurs et angles, on y projette, et l'on y diagonalise « proprement » : c'est la géométrie de la dimension n et le chemin vers le théorème spectral, résultat central de l'algèbre linéaire de deuxième année.

1. Produit scalaire et norme

D

Produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Un produit scalaire est une forme bilinéaire

$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ **symétrique**, **définie** ($\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$) et **positive** ($\langle x, x \rangle \geq 0$)

). Un espace euclidien est un tel espace E de dimension finie. La norme associée est

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Trois exemples de référence : le produit canonique $\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i$ sur $\mathbb{R}^n$, le produit $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\langle P, Q \rangle = \int_a^b P(t)Q(t) dt$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ (avec $\backslash(a$

P

Inégalités et identités

- Cauchy-Schwarz : $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.
- Inégalité triangulaire : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
- $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$; identité du parallélogramme :
 $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.
- Pythagore : $x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

E

Exemple 1 : un angle dans $\mathbb{R}_1[X]$

Munissons $\mathbb{R}_1[X]$ de $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 PQ$. Pour $P = X$ et $Q = 1 - X$:
 $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 (t - t^2) dt = \frac{1}{6}$, $\|P\|^2 = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$ et $\|Q\|^2 = \frac{1}{3}$. Alors
 $\cos \theta = \frac{1/6}{1/3} = \frac{1}{2}$: l'angle vaut $\frac{\pi}{3}$.

2. Familles et bases orthonormées

Une famille est **orthogonale** si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux, **orthonormée** si de plus chacun est de norme 1. Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Dans un espace euclidien de dimension n , une famille orthonormée de n vecteurs est donc une base orthonormée (BON).

P

Calculs en base orthonormée

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une BON, alors pour tous x, y : $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$,

$\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i$ et $\|x\|^2 = \sum_i \langle x, e_i \rangle^2$ (égalité de Parseval). Les coordonnées se lisent donc sans résoudre aucun système.

L'orthogonal d'un sous-espace F est $F^\perp = \{x \in E : \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0\}$. En dimension finie, $E = F \oplus F^\perp$, donc $\dim F^\perp = n - \dim F$, et $(F^\perp)^\perp = F$.

3. Le procédé de Gram-Schmidt

Toute famille libre $(v_1, \dots, v_p)$ se transforme en une famille orthonormée $(e_1, \dots, e_p)$ engendrant, à chaque étape, le même sous-espace : $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$. En particulier, tout espace euclidien possède une base orthonormée.

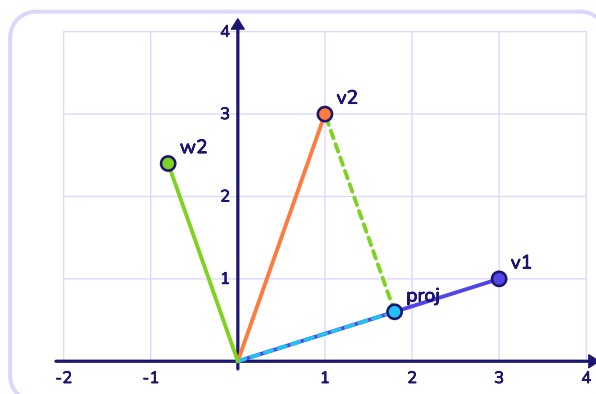
M

Méthode : orthonormaliser pas à pas

$$1. e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}.$$

2. Pour $k \geq 2$: on retire à v_k sa composante dans ce qui est déjà construit, $w_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, e_i \rangle e_i$

$$3. \text{ On normalise : } e_k = \frac{w_k}{\|w_k\|}.$$



E

Exemple 2 : orthonormaliser trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$

Soit $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (0, 1, 1)$. On obtient $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$.

Ensuite $\langle v_2, e_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$, donc $w_2 = v_2 - \frac{1}{2}(1, 1, 0) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$ de norme au carré $\frac{3}{2}$, et $e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)$. Enfin $w_3 = v_3 - \frac{1}{2}(1, 1, 0) - \frac{1}{6}(1, -1, 2) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, d'où $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)$.

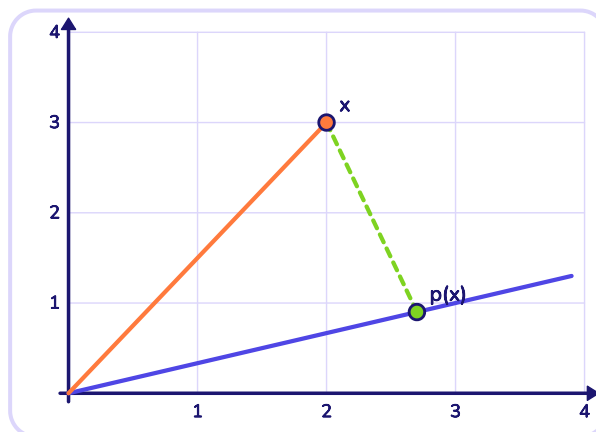
4. Projections orthogonales et distance à un sous-espace

Comme $E = F \oplus F^\perp$, tout x s'écrit de façon unique $x = p_F(x) + z$ avec $p_F(x) \in F$ et $z \in F^\perp$: $p_F(x)$ est le **projeté orthogonal** de x sur F .

P

Calcul et meilleure approximation

Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de F , alors $p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i$. De plus, $p_F(x)$ est l'unique point de F le plus proche de x : pour tout $y \in F$, $\|x - y\| \geq \|x - p_F(x)\|$, et la **distance** est $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$, avec $d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$.



Pour une droite dirigée par u , $p(x) = \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u$; pour un hyperplan d'équation $\langle n, x \rangle = 0$,

$$d(x, F) = \frac{|\langle n, x \rangle|}{\|n\|}.$$

E Exemple 3 : distance à un plan de $\mathbb{R}^3$

Soit $F = \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, 1))$ et $x = (2, 1, 4)$. Un vecteur normal à F est $n = (1, -1, -1)$ (il est orthogonal aux deux générateurs). Alors $\langle n, x \rangle = -3$ et $\|n\|^2 = 3$, donc $p_F(x) = x - \frac{-3}{3} n = x + n = (3, 0, 3)$ et $d(x, F) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.



Conseil de Zyro

Quand tu cherches une distance, écris d'abord le projeté : la distance est la norme de ce qui reste, et la vérification $x - p_F(x) \perp F$ détecte presque toutes les erreurs de calcul.

5. Isométries vectorielles



Isométrie vectorielle (endomorphisme orthogonal)

Un endomorphisme u de E est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme : $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout x .



Caractérisations

Les propositions suivantes sont équivalentes : u conserve la norme ; u conserve le produit scalaire ; u transforme une (toute) base orthonormée en base orthonormée. Une isométrie est un automorphisme, $u^{-1} = u^*$, et son déterminant vaut ± 1 . Elles forment le groupe orthogonal $O(E)$; celles de déterminant 1 forment $SO(E)$.

En dimension 2, les éléments de $SO(E)$ sont les rotations, ceux de déterminant -1 sont les réflexions (symétries orthogonales par rapport à une droite). En dimension 3, une isométrie de déterminant 1 est une rotation autour d'un axe (le sous-espace des vecteurs invariants), d'angle θ donné par $\text{tr}(u) = 1 + 2 \cos \theta$.

6. Matrices orthogonales

D Matrice orthogonale

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $A^T A = I_n$, c'est-à-dire $A^{-1} = A^T$.

Cela équivaut à dire que ses colonnes (ou ses lignes) forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Une matrice est orthogonale si et seulement si c'est la matrice d'une isométrie dans une base orthonormée. La matrice de passage entre deux bases orthonormées est orthogonale. On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices et $SO_n(\mathbb{R})$ celles de déterminant 1 . En dimension 2 :

$$SO_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \right\}.$$

E Exemple 4 : reconnaître une réflexion

Soit $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Les colonnes ont pour norme $\frac{\sqrt{9+16}}{5} = 1$ et sont orthogonales ($12 - 12 = 0$), donc A est orthogonale. Son déterminant est $\frac{-9 - 16}{25} = -1$: c'est une réflexion. Son axe est $\ker(A - I)$: comme $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, la droite d'axe est $\text{Vect}((2, 1))$.



Attention

Orthogonale n'est pas symétrique : $A^T A = I$ ne dit pas $A^T = A$. Une matrice dont les colonnes sont seulement orthogonales (mais pas de norme 1) n'est pas orthogonale.

7. Endomorphismes autoadjoints



Endomorphisme autoadjoint (symétrique)

Un endomorphisme u de E est autoadjoint si $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$ pour tous $x, y \in E$.



Propriétés

- Dans une base orthonormée, u est autoadjoint si et seulement si sa matrice est symétrique.
- Les projections et symétries orthogonales sont autoadjointes.
- Si un sous-espace F est stable par u autoadjoint, alors $F^\perp$ l'est aussi.
- Les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

La dernière propriété se démontre en une ligne : si $u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \mu y$, alors $\lambda \langle x, y \rangle = \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle = \mu \langle x, y \rangle$, donc $(\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0$ et $\langle x, y \rangle = 0$ si $\lambda \neq \mu$.

8. Le théorème spectral

P Théorème spectral

Tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormée de vecteurs propres ; ses valeurs propres sont réelles. Matriciellement : si

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale réelle telles que $A = PDP^T$.

M Méthode : diagonaliser une matrice symétrique en base orthonormée

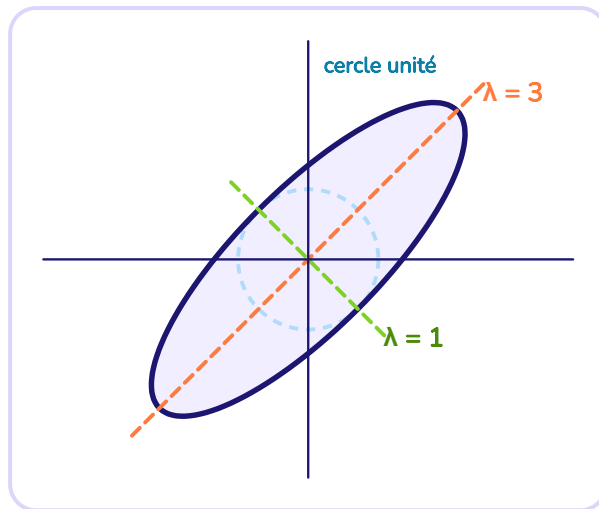
1. Calculer les valeurs propres (racines du polynôme caractéristique).
2. Pour chaque valeur propre, déterminer une base du sous-espace propre.
3. Orthonormaliser (Gram-Schmidt) à l'intérieur de chaque sous-espace propre ; les différents sous-espaces sont déjà orthogonaux entre eux.
4. Rassembler les colonnes dans P ; vérifier $P^TAP = D$.

E Exemple 5 : une matrice 3×3 symétrique

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2J - I$, où J est la matrice dont tous les coefficients

valent 1. Comme $J(1, 1, 1) = 3(1, 1, 1)$ et que J s'annule sur le plan $x + y + z = 0$, les valeurs propres de A sont 5 (pour $(1, 1, 1)$) et -1 (double, sur le plan

$x + y + z = 0$). Une BON adaptée est $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$, et $A = P \operatorname{diag}(5, -1, -1) P^T$.



Géométriquement, une matrice symétrique transforme le cercle unité en une ellipse dont les axes sont portés par des directions orthogonales, les vecteurs propres, et dont les demi-longueurs sont les valeurs propres (ici **3** et **1** pour $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$). Conséquence : sur la sphère unité, la forme quadratique $q(x) = \langle Ax, x \rangle = \sum \lambda_i y_i^2$ est comprise entre la plus petite et la plus grande valeur propre.



Attention

Le théorème spectral porte sur les matrices **symétriques réelles**. Une matrice orthogonale n'est en général pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (une rotation du plan n'a pas de valeur propre réelle).

À retenir

- Produit scalaire : bilinéaire, symétrique, défini, positif ; Cauchy-Schwarz
 $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.
- En BON : $x = \sum \langle x, e_i \rangle e_i$ et $\|x\|^2 = \sum \langle x, e_i \rangle^2$.
- Gram-Schmidt fabrique une BON ; $p_F(x) = \sum \langle x, e_i \rangle e_i$ et $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$.
- Isométrie : conserve la norme ; matrice orthogonale $A^T A = I$, déterminant ± 1 .
- Autoadjoint $\iff$ matrice symétrique en BON ; espaces propres orthogonaux ;
 $A = PDP^T$ avec P orthogonale.

Le livre de cours de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

 Contrôles de maths

Espaces euclidiens : exercices de maths
Maths Spé

Espaces euclidiens : contrôle de maths
Maths Spé

 **QCM de maths**

Espaces euclidiens : QCM de maths
Maths Spé

 **Exercices de maths**

Séries numériques : exercices de maths
Maths Spé

 **Exercices de maths**

Suites et séries de fonctions : exercices
de maths Maths Spé

 **Contrôles de maths**

Séries numériques : contrôle de maths
Maths Spé

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage