

Espaces euclidiens : exercices corrigés de maths Maths Spé à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^4$



a) $\langle x, y \rangle = 4 - 2 - 3 + 0 = -1$. $\|x\|^2 = 1 + 4 + 9 + 0 = 14$ donc $\|x\| = \sqrt{14}$.
 $\|y\|^2 = 16 + 1 + 1 + 4 = 22$ donc $\|y\| = \sqrt{22}$.

b) $|\langle x, y \rangle| = 1$ et $\|x\|\|y\| = \sqrt{308} \approx 17,5$. Comme $1 \leq \sqrt{308}$, l'inégalité est vérifiée, et elle est stricte : x et y ne sont pas colinéaires.

2 Est-ce un produit scalaire ?



a) Non : $\varphi(x, x) = x_1^2 - x_2^2$ peut être négatif (par exemple $x = (0, 1)$ donne -1) ; l'application n'est pas positive.

b) Oui : elle est bilinéaire et symétrique, et

$\psi(x, x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 \geq 0$, avec égalité seulement si $x_2 = 0$ puis $x_1 = 0$: elle est définie positive.

c) Non : pour $P = X(X - 1) \neq 0$ on a $\chi(P, P) = 0$; l'application n'est pas définie.

3 Une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$



a) $\|u_1\|^2 = \frac{1+4+4}{9} = 1$, de même pour u_2 et u_3 . Produits : $\langle u_1, u_2 \rangle = \frac{2+2-4}{9} = 0$, $\langle u_1, u_3 \rangle = \frac{2-4+2}{9} = 0$, $\langle u_2, u_3 \rangle = \frac{4-2-2}{9} = 0$. La famille est orthonormée de 3 vecteurs en dimension 3 : c'est une base orthonormée.

b) $\langle x, u_1 \rangle = \frac{3+12}{3} = 5$, $\langle x, u_2 \rangle = \frac{6-12}{3} = -2$, $\langle x, u_3 \rangle = \frac{6+6}{3} = 4$. Parseval : $25 + 4 + 16 = 45 = 9 + 0 + 36 = \|x\|^2$.

4 Matrice orthogonale ou non ?



Colonnes de A : $\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix}$ de norme $\frac{\sqrt{169}}{13} = 1$, $\begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix}$ de norme 1, et produit scalaire $\frac{-60+60}{169} = 0$: A est orthogonale. Son déterminant vaut $\frac{25+144}{169} = 1$: c'est une rotation d'angle θ tel que $\cos \theta = \frac{5}{13}$ et $\sin \theta = \frac{12}{13}$.

Pour B , la première colonne a pour norme $\sqrt{5} \neq 1$: B n'est pas orthogonale (bien qu'elle soit symétrique).

5 Projeter sur une droite



Avec $u = (1, 2)$: $\langle x, u \rangle = 3 + 8 = 11$ et $\|u\|^2 = 5$. Donc $p(x) = \frac{11}{5}(1, 2) = (\frac{11}{5}, \frac{22}{5})$.

Reste : $x - p(x) = (\frac{4}{5}, -\frac{2}{5})$; il est bien orthogonal à u car $\frac{4}{5} - \frac{4}{5} = 0$. Distance : $\frac{\sqrt{16+4}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0,894$.

6 Diagonaliser une matrice symétrique 2×2



Polynôme caractéristique : $(3 - \lambda)^2 - 1 = (\lambda - 2)(\lambda - 4)$; valeurs propres **2** et **4**.

Pour **4** : $(A - 4I)v = 0$ donne $v = (1, 1)$. Pour **2** : $v = (1, -1)$. Ces vecteurs sont orthogonaux ($1 - 1 = 0$), comme prévu pour une matrice symétrique. En normalisant :

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, D = \text{diag}(4, 2), \text{ et } A = PDP^T \text{ avec } P^T = P \text{ ici.}$$

7 Pythagore et parallélogramme



$\|x + y\|^2 = 9 + 16 + 2(-2) = 21$ et $\|x - y\|^2 = 9 + 16 - 2(-2) = 29$. Somme : $21 + 29 = 50 = 2(9 + 16)$, l'identité du parallélogramme est vérifiée.

Comme $\langle x, y \rangle = -2 \neq 0$, les vecteurs ne sont pas orthogonaux, ce qui se voit aussi à $\|x + y\|^2 \neq 9 + 16$.

8 Gram-Schmidt dans $\mathbb{R}^3$



$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0).$$

$$\langle v_2, e_1 \rangle = \frac{3}{\sqrt{5}}, \text{ donc } w_2 = v_2 - \frac{3}{5}(1, 2, 0) = \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 1\right) = \frac{1}{5}(2, -1, 5), \text{ de norme } \frac{\sqrt{30}}{5};$$
$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}(2, -1, 5).$$

$$\langle v_3, e_1 \rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}, \langle v_3, e_2 \rangle = \frac{9}{\sqrt{30}}. \text{ Alors}$$

$$w_3 = (0, 1, 2) - \frac{2}{5}(1, 2, 0) - \frac{9}{30}(2, -1, 5) = \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \text{ et } e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1).$$

$$\text{Contrôle : } (-2, 1, 1) \cdot (1, 2, 0) = 0 \text{ et } (-2, 1, 1) \cdot (2, -1, 5) = 0.$$

9 Distance à un plan de $\mathbb{R}^4$



a) $\langle a, b \rangle = 1 - 1 + 0 + 0 = 0$.

b) Comme (a, b) est orthogonale : $p_F(x) = \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a + \frac{\langle x, b \rangle}{\|b\|^2} b$. On a $\langle x, a \rangle = 6$, $\|a\|^2 = 3$, $\langle x, b \rangle = 2 - 3 + 0 + 5 = 4$, $\|b\|^2 = 3$. Donc $p_F(x) = 2a + \frac{4}{3}b = (\frac{10}{3}, \frac{2}{3}, 2, \frac{4}{3})$.

$x - p_F(x) = (-\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, -1, \frac{11}{3})$, de norme au carré $\frac{16+49+9+121}{9} = \frac{65}{3}$. Donc

$d(x, F) = \sqrt{65/3} \approx 4,65$. Vérification par Pythagore :

$$\|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = 39 - \frac{52}{3} = \frac{65}{3}.$$

10 Polynômes orthogonaux sur $[-1, 1]$



a) Les polynômes $1, X$ sont de parités différentes, donc $\langle 1, X \rangle = 0$ et $\langle X, X^2 - \frac{1}{3} \rangle = 0$ (intégrandes impairs sur un intervalle symétrique). Puis $\langle 1, X^2 - \frac{1}{3} \rangle = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$.

Normes au carré : $\|1\|^2 = 2$, $\|X\|^2 = \frac{2}{3}$, $\|X^2 - \frac{1}{3}\|^2 = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$.

b) X^3 est impair : $\langle X^3, 1 \rangle = 0$ et $\langle X^3, X^2 - \frac{1}{3} \rangle = 0$. Reste $\langle X^3, X \rangle = \frac{2}{5}$, donc

$$p(X^3) = \frac{2/5}{2/3} X = \frac{3}{5} X. \text{ Distance : } d^2 = \|X^3\|^2 - \|p\|^2 = \frac{2}{7} - \frac{9}{25} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{7} - \frac{6}{25} = \frac{8}{175},$$

soit $d = \sqrt{8/175} \approx 0,214$.

11 Matrice d'une projection orthogonale



a) $p(x) = \frac{\langle x, u \rangle}{9} u$, donc $P = \frac{1}{9} u u^T = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

b) P est symétrique. $P^2 = \frac{1}{81} u (u^T u) u^T = \frac{9}{81} u u^T = P$. Trace : $\frac{1+4+4}{9} = 1$, cohérente avec un projecteur de rang 1.

c) $p(9, 0, 0) = \frac{9}{9} (1, 2, 2) = (1, 2, 2)$. Le reste est $(8, -2, -2)$, de norme $\sqrt{72} = 6\sqrt{2} \approx 8,49$. Contrôle : $81 - 9 = 72$.

12 Un demi-tour dans l'espace



a) $S = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -7 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 8 \\ 4 & 8 & -1 \end{pmatrix}$. La première colonne a pour norme au carré $\frac{49+16+16}{81} = 1$; le

produit des colonnes 1 et 2 vaut $\frac{-28-4+32}{81} = 0$; le produit des colonnes 2 et 3 vaut $\frac{16-8-8}{81} = 0$. Plus généralement $S^T S = S^2 = 4P^2 - 4P + I = I$. Donc S est orthogonale.

b) S vaut $+1$ sur D et -1 sur $D^\perp$ (dimension 2), donc $\det S = (+1)(-1)(-1) = 1$: c'est une rotation. Sa trace est $\frac{-7-1-1}{9} = -1 = 1 + 2 \cos \theta$, d'où $\cos \theta = -1$: demi-tour d'axe D .

13 Une isométrie à coefficients rationnels



Les lignes de $3M$ ont pour carrés des normes $9, 9, 9$; leurs produits : $2 - 4 + 2 = 0$, $4 - 2 - 2 = 0$, $2 + 2 - 4 = 0$. Les lignes de M forment une base orthonormée, donc M est orthogonale.

Déterminant : $\det(3M) = 2(-4 - 2) + 2(-2 - 4) + 1(1 - 4) = -12 - 12 - 3 = -27$; $\det M = \frac{-27}{27} = -1$.

Enfin $M^{-1} = M^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

14 Réflexion du plan

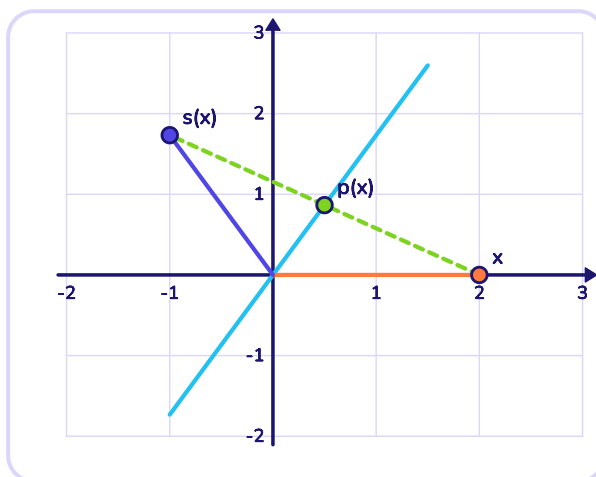


Pour une droite d'angle α , la réflexion a pour matrice $\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$. Ici $2\alpha = \frac{2\pi}{3}$:

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \text{ On vérifie } \det S = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1 \text{ et } S^2 = I.$$

Image : $s(2, 0) = (-1, \sqrt{3})$. Contrôle avec le projeté $p(x) = \langle x, d \rangle d = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$:

$2p(x) - x = (-1, \sqrt{3})$, c'est le symétrique et $p(x)$ est le milieu de $[x, s(x)]$.



15 Puissances d'une matrice symétrique



Notons J la matrice remplie de 1 et $p = \frac{1}{3}J$, projecteur orthogonal sur $\text{Vect}((1, 1, 1))$. Les valeurs propres de A sont **5** (sur cette droite) et **-1** (sur le plan orthogonal). Ainsi

$A = 5p + (-1)(I - p)$ et, comme p et $I - p$ sont des projecteurs orthogonaux entre eux, $A^n = 5^n p + (-1)^n (I - p)$.

$$\text{Donc } A^n = \frac{5^n - (-1)^n}{3} J + (-1)^n I.$$

Pour $n = 3$: $\frac{125-1}{3} = 42$, donc $A^3 = 42J - I$: coefficients diagonaux **41**, autres coefficients **42**.

16 Meilleure approximation affine d'une parabole

★★★★

Dans $\mathbb{R}[X]$ muni de $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 PQ$, on cherche le projeté de X^2 sur $F = \mathbb{R}_1[X]$:

$I(a, b) = \|X^2 - aX - b\|^2$ est minimal pour $aX + b = p_F(X^2)$.

Le reste est orthogonal à 1 et à X : $\frac{1}{3} - \frac{a}{2} - b = 0$ et $\frac{1}{4} - \frac{a}{3} - \frac{b}{2} = 0$. La première donne $b = \frac{1}{3} - \frac{a}{2}$; en reportant : $\frac{1}{4} - \frac{a}{3} - \frac{1}{6} + \frac{a}{4} = \frac{1}{12} - \frac{a}{12} = 0$, donc $a = 1$ et $b = -\frac{1}{6}$.

Minimum : $\|X^2 - p\|^2 = \langle X^2 - p, X^2 \rangle = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{18} = \frac{1}{180}$.

17 Produit scalaire de Frobenius

★★★★

a) $\text{tr}(A^T B) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$: la bilinéarité et la symétrie sont claires, et $\langle A, A \rangle = \sum a_{ij}^2 \geq 0$, nul seulement pour $A = 0$.

b) Pour S symétrique et K antisymétrique :

$\langle S, K \rangle = \text{tr}(SK) = \text{tr}((SK)^T) = \text{tr}(K^T S^T) = -\text{tr}(KS) = -\text{tr}(SK)$, donc

$\langle S, K \rangle = 0$. Comme $\dim \mathcal{S}_2 + \dim \mathcal{A}_2 = 3 + 1 = 4$, on a $\mathcal{A}_2 = \mathcal{S}_2^\perp$.

c) Le projeté sur $\mathcal{S}_2$ est $\frac{1}{2}(A + A^T) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix}$; le reste est $\frac{1}{2}(A - A^T) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

, de norme $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

18 L'opérateur de Legendre

★★★★

a) Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $(X^2 - 1)P'$ est de degré ≤ 3 , donc $u(P)$ est de degré ≤ 2 : u est bien un endomorphisme, linéaire. Pour P, Q :

$\langle u(P), Q \rangle = [(t^2 - 1)P'(t)Q(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P'Q' dt$. Le crochet est nul car $t^2 - 1$ s'annule en ± 1 . L'expression restante est symétrique en P, Q , donc

$\langle u(P), Q \rangle = \langle P, u(Q) \rangle$.

b) $u(1) = 0$, $u(X) = (X^2 - 1)' = 2X$, $u(X^2) = (2X^3 - 2X)' = 6X^2 - 2$, donc

$u(X^2 - \frac{1}{3}) = 6X^2 - 2 = 6(X^2 - \frac{1}{3})$. Valeurs propres : $0, 2, 6$, de vecteurs propres $1, X,$

$X^2 - \frac{1}{3}$. Ils sont deux à deux orthogonaux, comme le prédit la propriété des espaces propres d'un autoadjoint (voir l'exercice sur les polynômes sur $[-1, 1]$).

19 Maximum d'une forme quadratique

★★★

$\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda) [(2 - \lambda)^2 - 1] - (2 - \lambda) = (2 - \lambda) [(2 - \lambda)^2 - 2]$. Valeurs propres : $2 - \sqrt{2}, 2, 2 + \sqrt{2}$.

Par le théorème spectral, dans une BON de vecteurs propres, $q(x) = \sum \lambda_i y_i^2$ avec $\sum y_i^2 = 1$, donc $2 - \sqrt{2} \leq q(x) \leq 2 + \sqrt{2}$, avec égalité pour un vecteur propre unitaire.

Maximum $2 + \sqrt{2} \approx 3,41$ atteint en $\pm \frac{1}{2}(1, -\sqrt{2}, 1)$ (on vérifie

$A(1, -\sqrt{2}, 1) = (2 + \sqrt{2})(1, -\sqrt{2}, 1)$). Minimum $2 - \sqrt{2} \approx 0,59$ atteint en $\pm \frac{1}{2}(1, \sqrt{2}, 1)$.

20 Axe et angle d'une rotation de l'espace

★★★

a) $R^T R = M^T M = I$ et $\det R = (-1)^3 \det M = 1 : R \in SO_3(\mathbb{R})$, c'est une rotation.

b) L'axe est $\ker(R - I) = \ker(M + I)$. Le système $5x - 2y + z = 0, x + 5y + 2z = 0, 2x + y + z = 0$ (lignes de $3(M + I)$) donne, par la troisième équation, $z = -2x - y$, puis la première : $3x - 3y = 0$, donc $y = x, z = -3x$. Axe : $\text{Vect}((1, 1, -3))$. Vérification : $M(1, 1, -3) = (-1, -1, 3)$, donc $R(1, 1, -3) = (1, 1, -3)$.

Angle : $\text{tr } R = -\text{tr } M = -\frac{2+2-2}{3} = -\frac{2}{3} = 1 + 2 \cos \theta$, d'où $\cos \theta = -\frac{5}{6}$.

21 Image et noyau d'un autoadjoint

★★★

Inclusion $\text{Im } u \subset (\ker u)^\perp$: soit $y = u(x)$ et $z \in \ker u$. Alors

$$\langle y, z \rangle = \langle u(x), z \rangle = \langle x, u(z) \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0.$$

Égalité : par le théorème du rang, $\dim \text{Im } u = n - \dim \ker u$, et

$\dim(\ker u)^\perp = n - \dim \ker u$. Les deux sous-espaces sont inclus l'un dans l'autre et de même dimension finie : ils sont égaux.

Enfin, $E = \ker u \oplus (\ker u)^\perp = \ker u \oplus \text{Im } u$. Remarque : cela échoue pour un endomorphisme quelconque (par exemple un nilpotent non nul).

Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Espaces euclidiens : exercices de maths
Maths Spé

QCM de maths

Espaces euclidiens : QCM de maths
Maths Spé

Contrôles de maths

Espaces euclidiens : contrôle de maths
Maths Spé

Exercices de maths

Séries numériques : exercices de maths
Maths Spé

 Exercices de maths

Suites et séries de fonctions : exercices
de maths Maths Spé

 QCM de maths

Séries numériques : QCM de maths
Maths Spé

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage