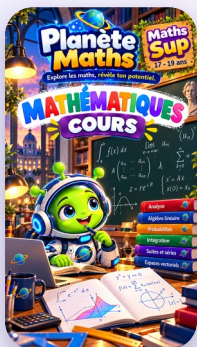


Espaces vectoriels et applications linéaires : cours de maths Maths Sup à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Les vecteurs du plan, les polynômes, les matrices, les fonctions continues : tous ces objets s'additionnent et se multiplient par un réel, et ils obéissent aux mêmes règles. L'algèbre linéaire isole ces règles et en tire une théorie unique, avec un vocabulaire (sous-espace, base, dimension, noyau, image) qui sert dans toute la suite des mathématiques. Ce chapitre construit ces outils et démontre le résultat central : le théorème du rang.

1. Espaces vectoriels et sous-espaces

D Espace vectoriel réel

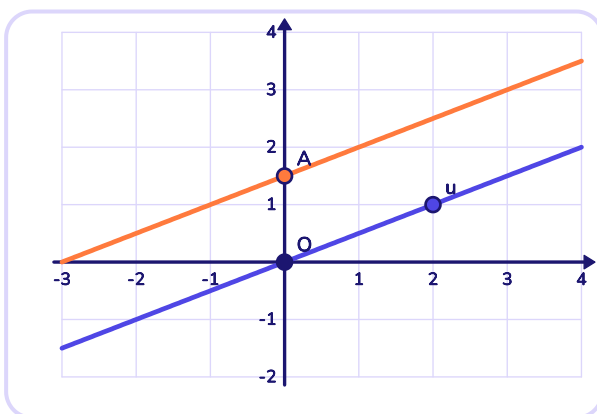
Un espace vectoriel (ev) sur $\mathbb{R}$ est un ensemble E muni d'une addition $+$ pour laquelle $(E, +)$ est un groupe commutatif (élément neutre 0_E), et d'une multiplication par les réels vérifiant, pour tous $u, v \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v, (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u, (\lambda\mu)u = \lambda(\mu u) \text{ et } 1 \cdot u = u.$$

Exemples usuels : $\mathbb{R}^n$, l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes, l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices, l'ensemble des suites réelles, l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

P Caractérisation des sous-espaces vectoriels

Une partie F de E est un sous-espace vectoriel (sev) de E si et seulement si $0_E \in F$ et, pour tous $u, v \in F$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda u + \mu v \in F$.



E**Exemple 1**

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$. Le triplet nul vérifie l'équation, donc $0 \in F$. Si (x, y, z) et (x', y', z') sont dans F , alors $(\lambda x + \mu x') + 2(\lambda y + \mu y') - (\lambda z + \mu z') = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$: la combinaison est dans F . Ainsi F est un sev de $\mathbb{R}^3$ (un plan).

**Erreur classique**

Une droite qui ne passe pas par l'origine n'est **pas** un sev (la droite orange de la figure) : elle ne contient pas 0 . L'intersection de deux sev est un sev, mais la réunion de deux sev n'en est en général pas un.

2. Combinaisons linéaires et sous-espace engendré

Une **combinaison linéaire** de $u_1, \dots, u_p$ est un vecteur $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p$. L'ensemble de ces combinaisons est noté $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$: c'est le plus petit sev de E contenant tous les u_i , appelé sev engendré. Dans $\mathbb{R}^2$, $\text{Vect}(u)$ est la droite dirigée par u si $u \neq 0$.

3. Familles libres, génératrices, bases

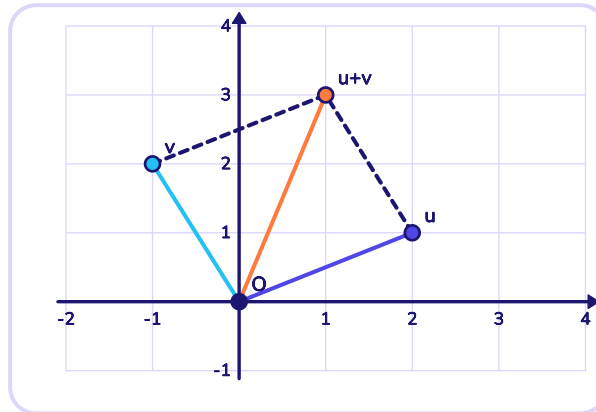
D**Famille libre, génératrice, base**

Une famille $(u_1, \dots, u_p)$ est **libre** si $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0$ entraîne $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$; elle est **liée** sinon. Elle est **génératrice** de E si $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = E$. Une **base** est une famille à la fois libre et génératrice.

P

Coordonnées

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , tout vecteur u s'écrit de façon **unique** $u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$; les x_i sont les coordonnées de u dans cette base.



M

Méthode : montrer qu'une famille est libre

1. Écrire $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0$.
2. En déduire un système sur les λ_i en projetant sur les coordonnées.
3. Montrer que la seule solution est $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$.

E

Exemple 2

Dans $\mathbb{R}^3$, soit $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (1, 0, 1)$. L'égalité $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$ donne $a + c = 0$, $a + b = 0$, $b + c = 0$. On en tire $c = -a$, $b = -a$, puis $b + c = -2a = 0$, donc $a = b = c = 0$: la famille est libre.



Astuce de Zyro

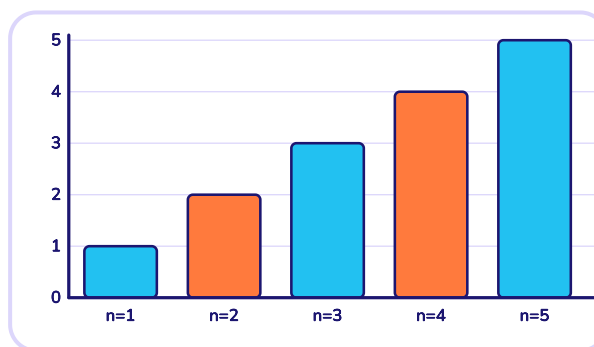
Deux vecteurs sont liés exactement quand l'un est un multiple de l'autre : sur la figure, u et v pointent dans des directions différentes, donc ils sont libres, et $u + v$ est la diagonale du parallélogramme qu'ils engendrent.

4. Dimension finie



Théorème de la dimension

Un ev admettant une famille génératrice finie possède des bases, et toutes ont le même nombre d'éléments : c'est sa **dimension**, notée $\dim E$. Si $\dim E = n$, alors toute famille libre a au plus n vecteurs, toute famille génératrice en a au moins n , et une famille libre (ou génératrice) de n vecteurs est une base.



On a $\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$ (base $(1, X, \dots, X^n)$) et $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) = np$. Si F est un sev de E , alors $\dim F \leq \dim E$, avec égalité si et seulement si $F = E$.



Formule de Grassmann

Pour deux sev F et G de dimension finie :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

5. Applications linéaires

D Application linéaire

Une application $f : E \rightarrow F$ est linéaire si, pour tous $u, v \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
 $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$. On note $\mathcal{L}(E, F)$ leur ensemble ; un **endomorphisme** est une application linéaire de E dans E , un **isomorphisme** est une application linéaire bijective.

Une application linéaire vérifie toujours $f(0_E) = 0_F$, et la composée de deux applications linéaires est linéaire. Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.

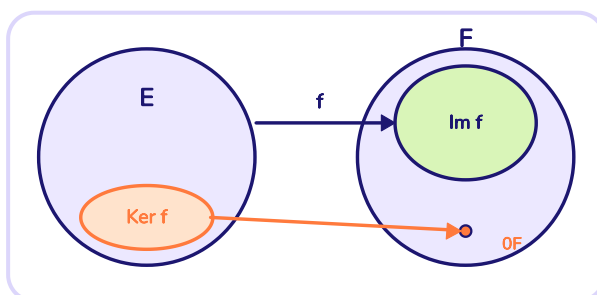
⚠ Erreur classique

$f(0) = 0$ est une condition nécessaire, pas suffisante : $(x, y) \mapsto (xy, x)$ envoie 0 sur 0 et n'est pas linéaire, car $f(2 \cdot (1, 1)) = (4, 2) \neq 2f(1, 1) = (2, 2)$.

6. Noyau et image

D Noyau et image

Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$: $\text{Ker } f = \{u \in E \mid f(u) = 0_F\}$ et $\text{Im } f = \{f(u) \mid u \in E\}$. Ce sont des sev de E et de F respectivement.



f injective

$$\text{Ker } f = \{0_E\}$$

**aucun vecteur non nul
n'est envoyé sur 0** **f surjective**

$$\text{Im } f = F$$

**tout vecteur de F a un
antécédent** **f bijective
(isomorphisme)****injective et
surjective** **f admet une réciproque
linéaire**

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , alors $\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$. L'équivalence « f injective $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{0_E\}$ » vient de la linéarité : $f(u) = f(v) \Leftrightarrow f(u - v) = 0$.

E**Exemple 3**

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x + y - z, 2x - y + z)$. Si $f(x, y, z) = 0$, on additionne les deux équations : $3x = 0$, donc $x = 0$ et $z = y$. Ainsi $\text{Ker } f = \text{Vect}((0, 1, 1))$, de dimension 1. Comme $f(1, 0, 0) = (1, 2)$ et $f(0, 1, 0) = (1, -1)$ ne sont pas colinéaires, $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$.

7. Le théorème du rang

Le **rang** d'une application linéaire est la dimension de son image : $\text{rg } f = \dim \text{Im } f$.

P**Théorème du rang**

Si E est de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\dim E = \dim \text{Ker } f + \text{rg } f$.

Idée de la preuve. On complète une base de $\mathbf{Ker} f$ en une base de E ; les images des vecteurs ajoutés forment une base de $\mathbf{Im} f$.

Dans l'exemple 3, $3 = 1 + 2$. Conséquence : si $\dim E = \dim F = n$, alors f injective $\Leftrightarrow f$ surjective $\Leftrightarrow f$ bijective. Cette équivalence est **fausse** en dimension infinie.

8. Somme directe et projecteurs

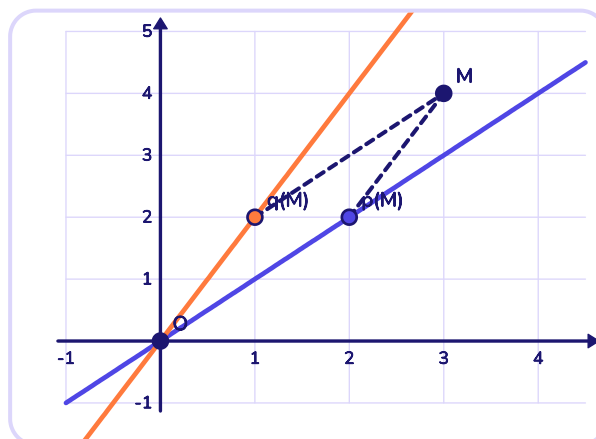
D Somme directe, supplémentaires

La somme $F + G = \{u + v \mid u \in F, v \in G\}$ est **directe** si $F \cap G = \{0\}$; on note $F \oplus G$. Si de plus $F \oplus G = E$, les sev F et G sont **supplémentaires** : tout $u \in E$ s'écrit de façon unique $u = v + w$ avec $v \in F, w \in G$, et $\dim E = \dim F + \dim G$.

D Projecteur

Un projecteur de E est un endomorphisme p tel que $p \circ p = p$. Alors $E = \mathbf{Ker} p \oplus \mathbf{Im} p$, et p est la projection sur $\mathbf{Im} p$ parallèlement à $\mathbf{Ker} p$.

En effet, $u = (u - p(u)) + p(u)$ avec $p(u - p(u)) = p(u) - p(p(u)) = 0$, et si $v = p(w)$ est aussi dans $\mathbf{Ker} p$, alors $v = p(p(w)) = p(v) = 0$.



E**Exemple 4**

Dans $\mathbb{R}^2$, soit $D = \text{Vect}((1, 1))$ et $E' = \text{Vect}((1, 2))$. Ces deux droites sont distinctes, donc supplémentaires. Pour $M = (3, 4)$, on cherche $a(1, 1) + b(1, 2) = (3, 4) : a + b = 3, a + 2b = 4$, donc $b = 1$ et $a = 2$. La projection sur D parallèlement à E' envoie M sur $(2, 2)$, et l'autre composante est $(1, 2)$.

À retenir

- F est un **sev** de E si $0 \in F$ et si F est stable par combinaisons linéaires.
- Une **base** est libre et génératrice ; tout vecteur y a des coordonnées uniques ; toutes les bases ont **dim** E éléments.
- En dimension n : une famille libre de n vecteurs, ou génératrice de n vecteurs, est une base.
- **Grassmann** : $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.
- f linéaire : f injective $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{0\}$; f surjective $\Leftrightarrow \text{Im } f = F$.
- **Théorème du rang** : $\dim E = \dim \text{Ker } f + \text{rg } f$.
- **Projecteur** : $p \circ p = p$ et $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$.

Le livre de cours de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

 Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Espaces vectoriels et applications
linéaires : exercices de maths Maths Sup

 Contrôles de maths

Espaces vectoriels et applications
linéaires : contrôle de maths Maths Sup

 QCM de maths

Espaces vectoriels et applications
linéaires : QCM de maths Maths Sup

 Exercices de maths

Matrices et déterminants : exercices de
maths Maths Sup

 Exercices de maths

 Contrôles de maths

Dénombrement et probabilités :
exercices de maths Maths Sup

Matrices et déterminants : contrôle de
maths Maths Sup

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage