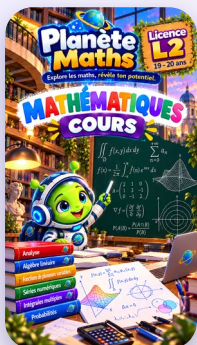


Espaces vectoriels et applications linéaires : cours de maths Licence L2 à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 100 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Les espaces vectoriels donnent un cadre unique pour manipuler des vecteurs du plan, des polynômes, des matrices ou des fonctions. Ce chapitre fixe le vocabulaire (sous-espaces, bases, dimension, sommes directes) puis étudie les applications qui respectent la structure : les applications linéaires, leur noyau, leur image et le théorème du rang. Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Espaces vectoriels

D Définition

Un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel est un ensemble E muni d'une addition $+$ (qui en fait un groupe commutatif, d'élément neutre 0_E) et d'une multiplication externe par les scalaires de $\mathbb{K}$ vérifiant, pour tous $u, v \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v, \quad (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u, \quad (\lambda\mu)u = \lambda(\mu u), \quad 1 \cdot u = u.$$

Exemples usuels : $\mathbb{K}^n$, l'espace $\mathbb{K}[X]$ des polynômes, l'espace $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices, l'espace $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ des fonctions définies sur un intervalle I , l'espace des suites réelles. De la définition on déduit $0 \cdot u = 0_E$ et $(-1) \cdot u = -u$.

2. Sous-espaces vectoriels

P Caractérisation

Une partie F de E est un sous-espace vectoriel si et seulement si $0_E \in F$ et, pour tous $u, v \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a $\lambda u + \mu v \in F$.

Une intersection de sous-espaces est un sous-espace ; une réunion ne l'est en général pas. Le sous-espace engendré par une famille $(u_1, \dots, u_p)$ est

$\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p\}$, le plus petit sous-espace qui la contient.

E**Exemple 1 : un plan de $\mathbb{R}^3$**

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$. Le vecteur nul vérifie l'équation, et si $u, v \in F$, alors $\lambda u + \mu v$ la vérifie aussi par linéarité de l'équation : F est un sous-espace. Un élément s'écrit $(x, y, x + 2y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 2)$. Donc $F = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 2))$, et ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels.

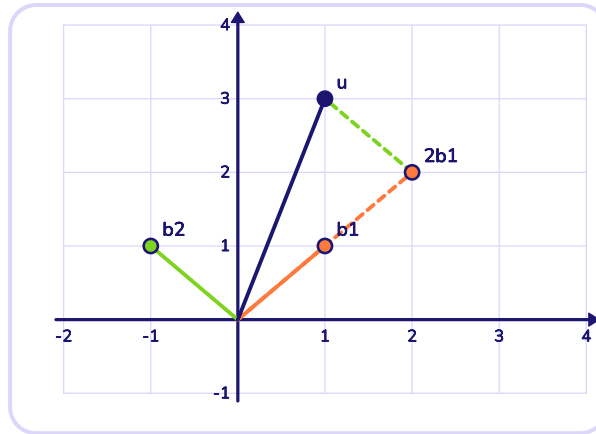
A**Erreur classique**

L'ensemble $\{(x, y) : x + y = 1\}$ n'est pas un sous-espace : il ne contient pas $(0, 0)$. Pensez toujours à tester le vecteur nul en premier.

3. Familles libres, génératrices, bases**D****Définitions**

Une famille $(u_1, \dots, u_p)$ est **libre** si $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0$ entraîne $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$; elle est **génératrice** si $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = E$; c'est une **base** si elle est libre et génératrice.

Dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, tout vecteur u s'écrit de façon unique $u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$: les x_i sont ses **coordonnées**.



E Exemple 2 : une base de $\mathbb{R}^3$

Soit $\mathcal{F} = ((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$. Le déterminant de ces trois vecteurs vaut $1(1 - 0) - 1(0 - 1) + 0 = 2 \neq 0$. La famille est donc libre, et comme elle compte 3 vecteurs dans un espace de dimension 3, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

! Le conseil de Zyro

Pour montrer qu'une famille est libre, écrivez toujours la combinaison linéaire nulle et résolvez le système : c'est la seule méthode qui marche partout, y compris pour des polynômes ou des fonctions.

4. Dimension

P Théorème de la dimension

Si E possède une famille génératrice finie, alors E admet une base, et toutes les bases ont le même nombre d'éléments, noté **dim** E . De plus toute famille libre se complète en une base (théorème de la base incomplète).

Si $\dim E = n$: une famille libre a au plus n vecteurs, une famille génératrice en a au moins n , et une famille de n vecteurs est une base dès qu'elle est libre *ou* génératrice. Un sous-espace F vérifie $\dim F \leq \dim E$, avec égalité si et seulement si $F = E$. Exemples : $\dim \mathbb{K}^n = n$, $\dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$, $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$.

P

Formule de Grassmann

Si F et G sont deux sous-espaces de dimension finie :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

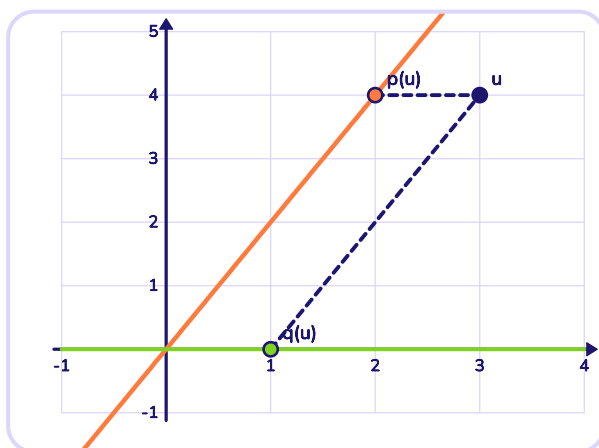
5. Somme directe et supplémentaires

D

Définition

La somme $F + G = \{f + g : f \in F, g \in G\}$ est **directe**, notée $F \oplus G$, si $F \cap G = \{0\}$. Si de plus $F \oplus G = E$, on dit que F et G sont **supplémentaires** dans E .

Ainsi $E = F \oplus G$ signifie que tout vecteur de E s'écrit *de manière unique* $u = f + g$ avec $f \in F$, $g \in G$. En dimension finie, $E = F \oplus G$ équivaut à $F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$. Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire (on complète une base de F en une base de E), mais il n'est pas unique.



Sur la figure, le plan est somme directe de la droite $F = \text{Vect}((1, 2))$ et de l'axe des abscisses G : le vecteur $u = (3, 4)$ se décompose en $2(1, 2) + (1, 0)$.

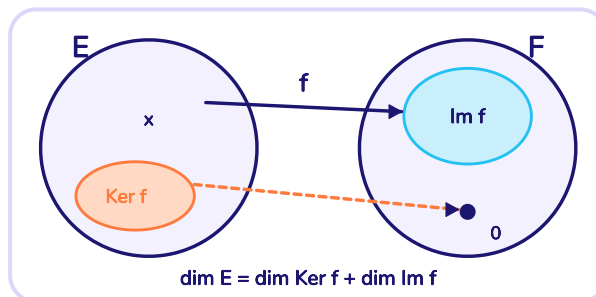
6. Applications linéaires, noyau, image

D

Définition

Une application $f : E \rightarrow F$ est **linéaire** si $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$ pour tous $u, v \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Son **noyau** est $\text{Ker } f = \{u \in E : f(u) = 0_F\}$ et son **image** est $\text{Im } f = f(E)$. Ce sont des sous-espaces de E et de F .

On a toujours $f(0_E) = 0_F$. L'application f est injective si et seulement si $\text{Ker } f = \{0\}$, surjective si et seulement si $\text{Im } f = F$. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , alors $\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$. Le **rang** de f est $\text{rg } f = \dim \text{Im } f$.



E

Exemple 3 : noyau et image

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + y + z)$. Pour $f(x, y, z) = 0$: en soustrayant les deux équations, $x + 2z = 0$, donc $x = -2z$ puis $y = z - x = 3z$. Ainsi $\text{Ker } f = \text{Vect}((-2, 3, 1))$, de dimension 1. L'image contient $f(1, 0, 0) = (1, 2)$ et $f(0, 1, 0) = (1, 1)$, non proportionnels : $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$, de dimension 2. On vérifie $1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

7. Théorème du rang

P Théorème du rang

Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire avec E de dimension finie. Alors $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f$.

Idée de la démonstration. Soit H un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E . La restriction de f à H est injective (son noyau est $H \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$) et son image est $\operatorname{Im} f$, car tout $u = h + k$ vérifie $f(u) = f(h)$. C'est donc un isomorphisme de H sur $\operatorname{Im} f$, d'où $\dim H = \operatorname{rg} f$ et $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim H$.

M Méthode : étudier une application linéaire

1. Écrire $f(u) = 0$ et résoudre le système pour obtenir $\operatorname{Ker} f$ et une base.
2. Calculer l'image des vecteurs d'une base de E : ils engendrent $\operatorname{Im} f$.
3. Contrôler avec $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f$.

8. Isomorphismes

D Définition

Un **isomorphisme** est une application linéaire bijective. Sa réciproque est alors linéaire. Deux espaces sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de l'un sur l'autre.

En dimension finie, deux espaces sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension : tout espace de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$, l'isomorphisme associant à un vecteur ses coordonnées dans une base. Le théorème du rang donne un critère très commode.

P Cas de la dimension égale

Si $\dim E = \dim F < +\infty$, alors pour $f : E \rightarrow F$ linéaire : f injective $\Leftrightarrow f$ surjective $\Leftrightarrow f$ bijective.

Propriété de $f : E \rightarrow F$	Caractérisation	En dimension finie
injective	$\text{Ker } f = \{0\}$	$\text{rg } f = \dim E$
surjective	$\text{Im } f = F$	$\text{rg } f = \dim F$
bijjective (isomorphisme)	injective et surjective	$\dim E = \dim F = \text{rg } f$

⚠ Erreur classique

Ce critère « injective équivaut à surjective » est faux si les dimensions diffèrent, et faux en dimension infinie : sur les suites, le décalage à droite est injectif mais pas surjectif.

À retenir

- Un sous-espace contient $\mathbf{0}$ et est stable par combinaisons linéaires ; l'intersection de sous-espaces en est un.
- Une base est une famille libre et génératrice ; tous les vecteurs s'y écrivent de façon unique.
- En dimension n , une famille de n vecteurs est une base si elle est libre ou génératrice.
- $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$, et $E = F \oplus G$ si $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = E$.
- f est injective si et seulement si $\text{Ker } f = \{0\}$; $\dim E = \dim \text{Ker } f + \text{rg } f$.
- À dimensions égales et finies, injective, surjective et bijective sont équivalentes.

Le livre de cours de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 100 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de Licence L2

Changer de niveau

Niveau : Licence L2

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi

 Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Espaces vectoriels et applications
linéaires : exercices de maths Licence L2

 Contrôles de maths

Espaces vectoriels et applications
linéaires : contrôle de maths Licence L2

 QCM de maths

Espaces vectoriels et applications
linéaires : QCM de maths Licence L2

 Exercices de maths

Réduction des endomorphismes :
exercices de maths Licence L2

 Exercices de maths

 Contrôles de maths

Espaces préhilbertiens et euclidiens :
exercices de maths Licence L2

Réduction des endomorphismes :
contrôle de maths Licence L2

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage