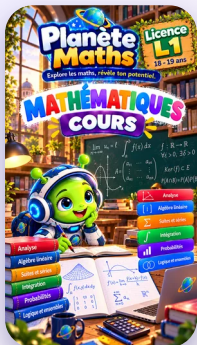


Espaces vectoriels : cours de maths Licence L1 à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 99 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Résoudre un système, étudier une suite récurrente, manipuler des polynômes ou des matrices : toutes ces situations obéissent à la même grammaire, celle des combinaisons linéaires. Ce chapitre construit le vocabulaire commun, **sous-espaces, familles libres, bases, dimension**, puis apprend à découper un espace en morceaux indépendants grâce aux sommes directes. Dans tout le texte, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. Espaces vectoriels et sous-espaces

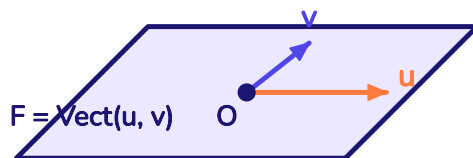
D Espace vectoriel

Un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel est un ensemble E muni d'une addition interne et d'une multiplication externe par les scalaires de $\mathbb{K}$, vérifiant les règles usuelles : l'addition est commutative, associative, admet un neutre 0_E et chaque vecteur a un opposé ; la multiplication par les scalaires est distributive sur les deux additions, associative, et $1 \cdot u = u$.

Les exemples de référence sont $\mathbb{K}^n$, l'espace $\mathbb{K}[X]$ des polynômes, son sous-ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n , l'espace $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ des matrices à p lignes et q colonnes, et l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

P Caractérisation des sous-espaces

Une partie F de E est un sous-espace vectoriel (sev) de E si et seulement si $0_E \in F$ et, pour tous $u, v \in F$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, le vecteur $\lambda u + \mu v$ appartient à F .



Un plan passant par l'origine, engendré par deux vecteurs u et v , est le prototype d'un sous-espace de $\mathbb{R}^3$: toute combinaison $\lambda u + \mu v$ reste dans le plan.

E Exemple 1 : deux parties de $\mathbb{R}^2$

Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 3y = 0\}$. Le vecteur nul vérifie l'équation. Si (x, y) et (x', y') sont dans A , alors

$$\lambda x + \mu x' + 3(\lambda y + \mu y') = \lambda(x + 3y) + \mu(x' + 3y') = 0 : A \text{ est un sev de } \mathbb{R}^2.$$

Soit $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 3y = 1\}$. Le vecteur nul n'y est pas : B n'est pas un sev.



Pièges classiques

Un sev contient toujours 0_E : c'est le premier test à faire. Et la réunion de deux sev n'est en général **pas** un sev : les deux axes de $\mathbb{R}^2$ en fournissent un contre-exemple, car $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$ n'est sur aucun axe. L'intersection, elle, est toujours un sev.

2. Combinaisons linéaires et familles génératrices

D Sous-espace engendré

Pour une famille $(u_1, \dots, u_p)$ de vecteurs de E , on note $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ l'ensemble des combinaisons linéaires $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p$. C'est le plus petit sev de E contenant tous les u_i . La famille est dite **génératrice** de F si $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.

Pour montrer qu'un ensemble défini par des équations est un sev, il suffit souvent de le « paramétrer » : on exprime ses éléments comme combinaisons de quelques vecteurs fixes, ce qui l'écrit comme un **Vect**.

3. Familles libres et familles liées

D Famille libre

La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est **libre** si la seule combinaison linéaire nulle est la combinaison triviale : $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$. Sinon, elle est **liée**, et l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.

M Méthode : tester la liberté dans $\mathbb{K}^n$

1. Écrire $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0$.
2. Traduire coordonnée par coordonnée en un système homogène en les λ_i .
3. Résoudre : si l'unique solution est nulle, la famille est libre ; sinon elle est liée.

E Exemple 2 : une famille liée

Dans $\mathbb{R}^3$, soient $u_1 = (1, 2, -1)$, $u_2 = (2, 1, 3)$, $u_3 = (4, 5, 1)$. On remarque que $2u_1 + u_2 = (4, 5, 1) = u_3$. Donc $2u_1 + u_2 - u_3 = 0$ est une relation non triviale : la famille (u_1, u_2, u_3) est liée.

4. Bases et coordonnées

D Base

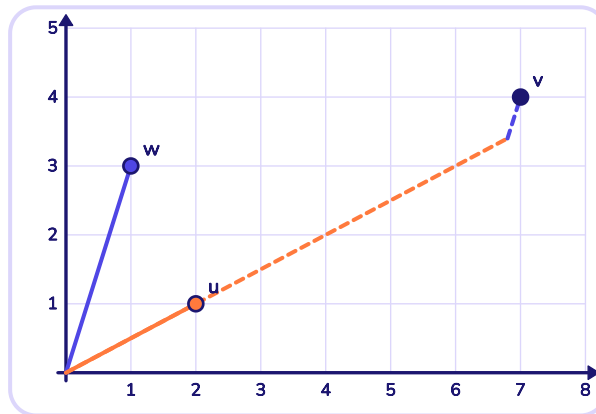
Une famille est une **base** de E si elle est à la fois libre et génératrice de E .

P

Coordonnées

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , tout vecteur x s'écrit de manière **unique** $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Les scalaires $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées de x dans cette base.

L'existence vient du caractère générateur, l'unicité du caractère libre : si deux écritures coïncident, leur différence est une combinaison nulle, donc triviale. La base canonique de $\mathbb{K}^n$ est $(e_1, \dots, e_n)$ où e_i a un **1** en position i et des **0** ailleurs.



La figure illustre le changement de point de vue : dans la base (u, w) de $\mathbb{R}^2$, avec $u = (2, 1)$ et $w = (1, 3)$, le vecteur $v = (7, 4)$ s'écrit $v = \frac{17}{5}u + \frac{1}{5}w$. Ses coordonnées dans cette base sont donc $(\frac{17}{5}, \frac{1}{5})$, différentes de ses coordonnées canoniques $(7, 4)$.

5. Dimension

P

Théorème de la dimension

Si E possède une famille génératrice finie, alors E admet des bases et toutes ses bases ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est la **dimension** de E , notée $\dim E$.

Espace	Dimension	Une base
$\mathbb{K}^n$	n	base canonique
$\mathbb{K}_n[X]$	$n + 1$	$(1, X, \dots, X^n)$
$\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$	pq	matrices élémentaires E_{ij}
$\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$ -espace	2	$(1, i)$

P Famille de n vecteurs en dimension n

Si $\dim E = n$, alors toute famille libre a au plus n vecteurs, toute famille génératrice en a au moins n , et pour une famille de **exactement** n vecteurs, les propriétés « libre », « génératrice » et « base » sont équivalentes.

E Exemple 3 : base et dimension d'un plan

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 3z = 0\}$. L'équation donne $y = 2x + 3z$, donc $(x, y, z) = (x, 2x + 3z, z) = x(1, 2, 0) + z(0, 3, 1)$.

La famille $((1, 2, 0), (0, 3, 1))$ engendre F . Elle est libre : si

$a(1, 2, 0) + b(0, 3, 1) = 0$, la première coordonnée donne $a = 0$ et la troisième $b = 0$. C'est donc une base de F , et $\dim F = 2$.



Astuce de Zyro

Chaque équation linéaire indépendante imposée à $\mathbb{K}^n$ fait perdre exactement une dimension : trois équations indépendantes dans $\mathbb{R}^5$ laissent un sous-espace de dimension 2.

6. Théorème de la base incomplète



Théorème de la base incomplète

Soit E de dimension finie, L une famille libre de E et G une famille génératrice finie de E . Alors on peut compléter L par des vecteurs de G pour obtenir une base de E . En particulier, toute famille libre se complète en une base, et de toute famille génératrice finie on peut extraire une base.

Conséquence importante : si F est un sev de E de dimension finie, alors F est de dimension finie, $\dim F \leq \dim E$, et l'égalité des dimensions entraîne $F = E$.



Exemple 4 : compléter une famille libre

Dans $\mathbb{R}^4$, la famille $v_1 = (1, 2, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1, 0)$ est libre (deux vecteurs non colinéaires). On la complète avec les vecteurs canoniques $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ et $e_4 = (0, 0, 0, 1)$. Si $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 e_1 + \lambda_4 e_4 = 0$, la troisième coordonnée donne $\lambda_2 = 0$, la deuxième $2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ donc $\lambda_1 = 0$, puis $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Quatre vecteurs libres en dimension 4 forment une base.

7. Somme et somme directe

D Somme de deux sous-espaces

Si F et G sont deux sev de E , $F + G = \{f + g : f \in F, g \in G\}$ est un sev de E . La somme est dite **directe**, notée $F \oplus G$, si tout vecteur de $F + G$ s'écrit de façon **unique** comme $f + g$.

P Critère et formule de Grassmann

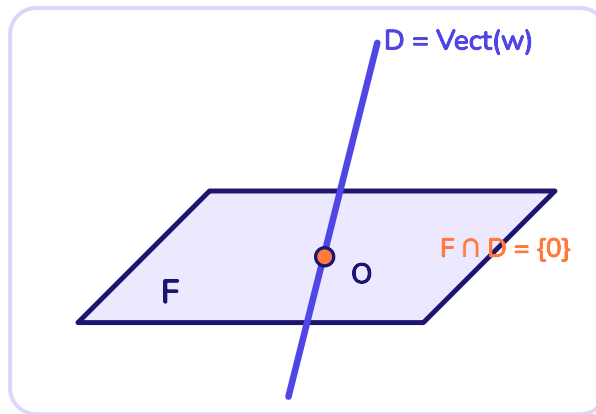
La somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$. En dimension finie, $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

La preuve du critère est courte : si $f + g = f' + g'$, alors $f - f' = g' - g$ appartient à $F \cap G$. Si l'intersection est réduite à $\{0\}$, ce vecteur est nul, donc $f = f'$ et $g = g'$: la décomposition est unique. Réciproquement, un vecteur non nul h de $F \cap G$ s'écrit de deux façons, $h + 0$ et $0 + h$.

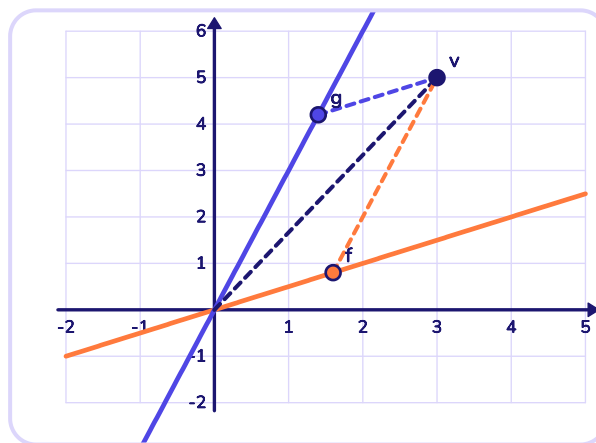
8. Sous-espaces supplémentaires

D Supplémentaires

Deux sev F et G de E sont **supplémentaires** si $E = F \oplus G$, c'est-à-dire $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = E$. En dimension finie, cela équivaut à $F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.



Dans $\mathbb{R}^3$, un plan F et une droite D non contenue dans F sont supplémentaires : ils ne se coupent qu'en 0 et $2 + 1 = 3$. Tout sev d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire (on complète une base de F en une base de E et on prend pour G l'espace engendré par les vecteurs ajoutés), mais ce supplémentaire n'est **jamais unique** dès que $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$.



E

Exemple 5 : décomposer un vecteur

Dans $\mathbb{R}^2$, soient $F = \text{Vect}((2, 1))$ et $G = \text{Vect}((1, 3))$. Ces droites sont distinctes, donc $F \cap G = \{0\}$, et $1 + 1 = 2 : \mathbb{R}^2 = F \oplus G$. Pour $v = (3, 5)$, on résout $a(2, 1) + b(1, 3) = (3, 5)$, soit $2a + b = 3$ et $a + 3b = 5$, d'où $b = \frac{7}{5}$ et $a = \frac{4}{5}$. Ainsi $v = (\frac{8}{5}, \frac{4}{5}) + (\frac{7}{5}, \frac{21}{5})$, avec la première composante dans F et la seconde dans G .

À retenir

- Un **sev** contient **0** et est stable par combinaison linéaire ; $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ est le plus petit sev contenant les u_i .
- Une famille est **libre** si la seule combinaison nulle est la triviale ; une **base** est libre et génératrice, et donne des coordonnées uniques.
- La **dimension** est le nombre commun d'éléments des bases ; en dimension n , une famille de n vecteurs est libre $\Leftrightarrow$ génératrice $\Leftrightarrow$ base.
- **Base incomplète** : toute famille libre se complète en une base ; si $F \subset E$ et $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.
- **Grassmann** : $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$; la somme est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.
- **Supplémentaires** : $E = F \oplus G$ équivaut à $F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$; ils existent toujours, mais ne sont pas uniques.

Le livre de cours de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 99 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

  **Zyro te conseille la suite**

 Exercices de maths

Espaces vectoriels : exercices de maths
Licence L1

 Contrôles de maths

Espaces vectoriels : contrôle de maths
Licence L1

 QCM de maths

Espaces vectoriels : QCM de maths
Licence L1

 Exercices de maths

Applications linéaires et matrices :
exercices de maths Licence L1

 Exercices de maths

Déterminants : exercices de maths
Licence L1

 Contrôles de maths

Applications linéaires et matrices :
contrôle de maths Licence L1

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage