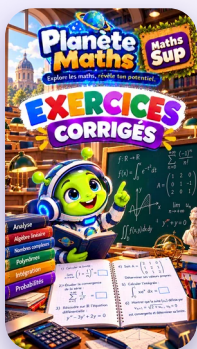


Espaces vectoriels et applications linéaires : exercices corrigés de maths Maths Sup à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 134 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Sous-espace ou non ?



$A : (0, 0) \in A$ et l'équation $x - 2y = 0$ est linéaire, donc stable par combinaisons : A est un sev (la droite $\text{Vect}((2, 1))$).

$B : (0, 0)$ ne vérifie pas $0 + 0 = 1$, donc B n'est pas un sev.

$C : (1, 0)$ et $(0, 1)$ sont dans C mais leur somme $(1, 1)$ vérifie $xy = 1 \neq 0$: C n'est pas un sev.

2 Appartenance à un Vect



On cherche a, b avec $a + 3b = 7$ et $2a + b = 4$. De la seconde, $b = 4 - 2a$; alors $a + 12 - 6a = 7$, donc $a = 1$ et $b = 2$.

Vérification : $1 \cdot (1, 2) + 2 \cdot (3, 1) = (7, 4)$. Oui, $(7, 4) \in \text{Vect}(u, v)$.

3 Linéaire ou non ?



f : chaque composante est une combinaison linéaire de x et y , donc f est linéaire.

g : $g(0, 0) = (1, 0) \neq (0, 0)$, donc g n'est pas linéaire.

h : $h(2, 2) = (4, 2)$ alors que $2h(1, 1) = (2, 2)$, donc h n'est pas linéaire.

4 Libre ou liée dans le plan



$((1, 2), (2, 4))$: $(2, 4) = 2(1, 2)$, la famille est liée.

$((1, 2), (2, 1))$: $a(1, 2) + b(2, 1) = 0$ donne $a + 2b = 0$ et $2a + b = 0$, d'où $3b = 0$ puis $a = b = 0$: famille libre.

La troisième famille a 3 vecteurs dans un espace de dimension 2 : elle est liée.

5 Calculer des dimensions



$\dim \mathbb{R}^5 = 5$; $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$ (base $1, X, X^2, X^3$) ; $\dim \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) = 2 \times 3 = 6$.

$\text{Vect}((1, 0), (2, 0)) = \text{Vect}((1, 0))$ car $(2, 0) = 2(1, 0)$: dimension 1.

$\{z = 0\} = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$: dimension 2.

6 Coordonnées dans une base



On cherche a, b, c avec

$$a(1, 0, 0) + b(1, 1, 0) + c(1, 1, 1) = (a + b + c, b + c, c) = (3, -1, 2).$$

Donc $c = 2$, puis $b = -1 - 2 = -3$, puis $a = 3 - b - c = 4$. Coordonnées : $(4, -3, 2)$.

7 Noyau et image d'un exemple simple



$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, donc $\text{Ker } f = \text{Vect}((1, 1))$, de dimension 1.

$f(x, y) = (x - y)(1, 2)$, donc $\text{Im } f = \text{Vect}((1, 2))$, de dimension 1.

Théorème du rang : $2 = 1 + 1$. Vérifié.

8 Un plan défini par deux équations



F est l'intersection de deux sev définis par des équations linéaires homogènes : c'est un sev.

Les équations donnent $y = x$ puis $z = -2x$:

$F = \{x(1, 1, -2) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 1, -2))$. Le vecteur est non nul, donc $((1, 1, -2))$ est une base et $\dim F = 1$.

9 Base d'un sev de $\mathbb{R}^4$



Un vecteur de G s'écrit $(x, -x, z, z) = x(1, -1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 1)$, donc la famille $((1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$ engendre G .

Elle est libre : $a(1, -1, 0, 0) + b(0, 0, 1, 1) = 0$ donne $a = 0$ et $b = 0$. C'est une base, et $\dim G = 2$.

10 Une base de $\mathbb{R}^3$



On résout $a(1, 0, 1) + b(1, 1, 0) + c(0, 1, 1) = 0 : a + b = 0, b + c = 0, a + c = 0$. Alors $a = -b, c = -b$ et $a + c = -2b = 0$, donc $a = b = c = 0$: la famille est libre.

Elle compte 3 vecteurs dans un espace de dimension 3 : c'est une base.

11 Polynômes s'annulant en 1



L'application $P \mapsto P(1)$ est linéaire, et F est son noyau : c'est un sev.

Pour $P = aX^2 + bX + c, P(1) = 0 \Leftrightarrow c = -a - b$, donc $P = a(X^2 - 1) + b(X - 1)$.

La famille $(X^2 - 1, X - 1)$ engendre F ; elle est libre (degrés distincts et non nuls). C'est une base, $\dim F = 2$.

12 Noyau et image en dimension 3



$f(x, y, z) = 0$ donne $x = -y, z = -y$, et la troisième équation $x - z = 0$ est alors vérifiée. Donc $\text{Ker } f = \text{Vect}((1, -1, 1))$.

Par le théorème du rang, $\text{rg } f = 3 - 1 = 2$. On a $f(e_1) = (1, 0, 1)$ et $f(e_2) = (1, 1, 0)$, non colinéaires, donc $\text{Im } f = \text{Vect}((1, 0, 1), (1, 1, 0)) = \{(a, b, c) \mid a = b + c\}$.

13 Injective mais pas surjective



Si $f(x, y) = 0$, alors $x + y = 0$ et $x - y = 0$, d'où $x = y = 0$: $\text{Ker } f = \{0\}$, donc f est injective.

Théorème du rang : $\text{rg } f = 2 - 0 = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc $\text{Im } f \neq \mathbb{R}^3$: f n'est pas surjective.

14 Un projecteur du plan



p est linéaire. De plus $p(p(x, y)) = p(x - y, 0) = (x - y, 0) = p(x, y)$, donc $p \circ p = p$.

$\text{Ker } p = \{x = y\} = \text{Vect}((1, 1))$; $\text{Im } p = \{(a, 0)\} = \text{Vect}((1, 0))$. On a bien $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}((1, 1)) \oplus \text{Vect}((1, 0))$.

15 Une somme directe dans $\mathbb{R}^3$



Si $(1, 0, 1) \in F$, il existerait a, b avec $(a, a + b, b) = (1, 0, 1)$, d'où $a = b = 1$ et $a + b = 2 \neq 0$: impossible. Donc $F \cap G = \{0\}$ (G est une droite).

$\dim F + \dim G = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Décomposition : on résout $a(1, 1, 0) + b(0, 1, 1) + c(1, 0, 1) = (1, 2, 3)$, soit $a + c = 1$, $a + b = 2$, $b + c = 3$, d'où $a = 0$, $b = 2$, $c = 1$. Ainsi $(1, 2, 3) = (0, 2, 2) + (1, 0, 1)$ avec $(0, 2, 2) \in F$ et $(1, 0, 1) \in G$.

16 Le théorème du rang en action



$\dim \text{Ker } f = 4 - 2 = 2$. Comme $\text{Ker } f \neq \{0\}$, f n'est pas injective ; comme $2 < 3$, elle n'est pas surjective.

Pour g : $\text{rg } g = 3 - 0 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc g est surjective, et injective par hypothèse : g est un isomorphisme.

17 La dérivation sur les polynômes



La dérivation est linéaire : $(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$.

$P' = 0$ si et seulement si P est constant : $\text{Ker } D = \mathbb{R}_0[X]$, de dimension 1.

La dérivée d'un polynôme de degré ≤ 3 est de degré ≤ 2 , et tout polynôme de degré ≤ 2 est la dérivée d'une primitive polynomiale : $\text{Im } D = \mathbb{R}_2[X]$, de dimension 3.

Théorème du rang : $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4 = 1 + 3$.

18 Formule de Grassmann

★★★★

F et G sont définis par une seule équation indépendante : $\dim F = \dim G = 3$.

$F \cap G = \{x = y, z = t\} = \text{Vect}((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$, de dimension 2.

Grassmann : $\dim(F + G) = 3 + 3 - 2 = 4$, donc $F + G = \mathbb{R}^4$. Comme $F \cap G \neq \{0\}$, la somme n'est pas directe.

19 Hyperplan et droite supplémentaires

★★★★

$\dim H = 3$ (une équation) et $\dim D = 1$. Si $\lambda(1, 1, 1, 1) \in H$, alors $4\lambda = 0$, donc $\lambda = 0$: $H \cap D = \{0\}$. Avec $3 + 1 = 4$, on a $\mathbb{R}^4 = H \oplus D$.

On écrit $u = \lambda(1, 1, 1, 1) + h$ avec $h \in H$: en sommant les coordonnées, $4 = 4\lambda$, donc $\lambda = 1$ et $h = (3, -1, -1, -1)$, dont la somme des coordonnées est bien nulle.

20 Un endomorphisme nilpotent

★★★★

$f^2(x, y, z) = f(y, z, 0) = (z, 0, 0)$ et $f^3(x, y, z) = f(z, 0, 0) = (0, 0, 0) : f^3 = 0$.

$\text{Ker } f = \{y = z = 0\} = \text{Vect}((1, 0, 0))$; $\text{Ker } f^2 = \{z = 0\} = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$.

Comme $(\text{id} - f) \circ (\text{id} + f + f^2) = \text{id} - f^3 = \text{id}$ et que ces applications commutent, $\text{id} - f$ est bijective d'inverse $\text{id} + f + f^2$.

21 Une symétrie

★★★★

$s(x, y) = 2(x - y, 0) - (x, y) = (x - 2y, -y)$. Alors

$s(s(x, y)) = s(x - 2y, -y) = ((x - 2y) + 2y, y) = (x, y) : s \circ s = \text{id}$.

$s(x, y) = (x, y) \Leftrightarrow y = 0 : \text{Ker}(s - \text{id}) = \text{Vect}((1, 0)) = \text{Im } p$.

$s(x, y) = -(x, y) \Leftrightarrow x - 2y = -x \Leftrightarrow x = y : \text{Ker}(s + \text{id}) = \text{Vect}((1, 1)) = \text{Ker } p$.

22 Base adaptée et projection



Les vecteurs $(1, -1, 0)$ et $(0, 1, -1)$ sont dans F et non colinéaires : ils forment une base de F ($\dim F = 2$). Le vecteur $(1, 1, 1) \notin F$ (somme $3 \neq 0$), donc $F \cap D = \{0\}$ et la famille de trois vecteurs est libre, donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Pour $u = (x, y, z)$, on écrit $u = \lambda(1, 1, 1) + h$, $h \in F$: en sommant les coordonnées, $x + y + z = 3\lambda$. Donc $p(x, y, z) = \frac{x + y + z}{3}(1, 1, 1)$.

23 Image d'une famille libre



Supposons $\sum \lambda_i f(u_i) = 0$. Par linéarité, $f(\sum \lambda_i u_i) = 0$, donc $\sum \lambda_i u_i \in \text{Ker } f = \{0\}$. Comme (u_i) est libre, tous les λ_i sont nuls : la famille image est libre.

Sans injectivité, c'est faux : pour $f(x, y) = (x, 0)$, la famille libre $((1, 0), (0, 1))$ a pour image $((1, 0), (0, 0))$, qui est liée.

Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 134 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

 Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Espaces vectoriels et applications
linéaires : exercices de maths Maths Sup

 QCM de maths

Espaces vectoriels et applications
linéaires : QCM de maths Maths Sup

 Contrôles de maths

Espaces vectoriels et applications
linéaires : contrôle de maths Maths Sup

 Exercices de maths

Matrices et déterminants : exercices de
maths Maths Sup

 Exercices de maths

Dénombrement et probabilités :
exercices de maths Maths Sup

 QCM de maths

Matrices et déterminants : QCM de
maths Maths Sup

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage