

Espaces vectoriels et applications linéaires : exercices corrigés de maths Licence L2 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 128 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Sous-espaces ou non ?



- a. $(0, 0) \in A$ et $\lambda(x, y) + \mu(x', y')$ vérifie $\lambda(x + y) + \mu(x' + y') = 0$: oui.
- b. $(0, 0) \notin B$: non.
- c. $(1, 0)$ et $(0, 1)$ sont dans C mais leur somme $(1, 1)$ n'y est pas ($1 \times 1 \neq 0$) : non.
- d. $(1, 0) \in D$ mais $-1 \cdot (1, 0) = (-1, 0) \notin D$: non.

2 Combinaisons linéaires



- a. $2v - 3w = (2 - 6, 4 + 3, 6 - 0) = (-4, 7, 6)$.
- b. Cherchons $av + bw = (5, 0, 3)$: la dernière coordonnée donne $3a = 3$, donc $a = 1$; la première donne $1 + 2b = 5$, donc $b = 2$; la deuxième : $2 - 2 = 0$, c'est cohérent. Donc $(5, 0, 3) = v + 2w$: **oui**. Pour $(5, 3, 3)$ la 3ème et la 1ère coordonnées imposent $a = 1, b = 2$, mais la 2ème coordonnée vaudrait alors $2a - b = 0 \neq 3$: **non**.

3 Famille libre ou liée



- a. $3 \cdot (1, 2) = (3, 6)$: les vecteurs sont proportionnels, la famille est **liée**.
- b. Le déterminant vaut $2 \times 3 - 1 \times 1 = 5 \neq 0$: la famille est **libre** (et c'est une base de $\mathbb{R}^2$).
- c. On a $(1, 0) + (0, 1) - (1, 1) = 0$: **liée**. Trois vecteurs dans un espace de dimension 2 forment toujours une famille liée.

4 Calculer des dimensions



- a. Base $(1, X, X^2, X^3)$: dimension 4.
- b. Base des matrices élémentaires : $2 \times 3 = 6$.
- c. Base $(1, i)$: dimension 2.
- d. Les éléments sont $(x, y, z, x) = x(1, 0, 0, 1) + y(0, 1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 0)$: dimension 3.

5 Linéaire ou pas ?



- a. Chaque coordonnée est une combinaison linéaire de x et y : f est **linéaire**. Et $f(2, 1) = (4 - 1, 2 + 3) = (3, 5)$.
- b. $g(0, 0) = (1, 0) \neq (0, 0)$: **non linéaire**.
- c. $h(2, 2) = (4, 2)$ alors que $2h(1, 1) = (2, 2)$: **non linéaire**.

6 Un noyau et une image dans le plan



$f(x, y) = 0$ équivaut à $x = 2y$ (la seconde équation est -2 fois la première). Donc $\text{Ker } f = \text{Vect}((2, 1))$, de dimension 1. Par ailleurs $f(x, y) = (x - 2y)(1, -2)$, donc $\text{Im } f = \text{Vect}((1, -2))$, de dimension 1. Vérification : $1 + 1 = 2 = \dim \mathbb{R}^2$.

7 La dérivation des polynômes



La dérivation est linéaire : $(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$. Si $P = a + bX + cX^2$, alors $P' = b + 2cX$. Donc $P' = 0$ si et seulement si $b = c = 0$: $\text{Ker } D = \mathbb{R}_0[X]$ (les constantes), de dimension 1. L'image est $\{b + 2cX\} = \mathbb{R}_1[X]$, de dimension 2, donc $\text{rg } D = 2$. Vérification : $1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$.

8 Base d'un sous-espace de $\mathbb{R}^4$



Un élément de F s'écrit $(x, -x, z, z) = x(1, -1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 1)$. La famille $((1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$ est génératrice, et libre car non proportionnelle (les supports sont disjoints). C'est une base et $\dim F = 2$.

9 Famille liée dans $\mathbb{R}^3$



On remarque $2u_1 - u_2 = (2 - 2, 4 - 1, 2 - 0) = (0, 3, 2) = u_3$, soit

$2u_1 - u_2 - u_3 = 0$: la famille est liée. Comme u_1 et u_2 ne sont pas proportionnels, ils sont libres, et $u_3 \in \text{Vect}(u_1, u_2)$. Donc $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3) = \text{Vect}(u_1, u_2)$, de base (u_1, u_2) et de dimension (rang de la famille) 2.

10 Un plan et une droite supplémentaires



Si $(t, t, t) \in F$, alors $3t = 0$, donc $t = 0$: $F \cap G = \{0\}$. Or $\dim F = 2$ (équation unique non nulle) et $\dim G = 1$, donc $\dim F + \dim G = 3 = \dim \mathbb{R}^3$: on a bien $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Décomposition : $(3, 0, 0) = (1, 1, 1) + (2, -1, -1)$, avec $(1, 1, 1) \in G$ et $(2, -1, -1) \in F$ car $2 - 1 - 1 = 0$.

11 Dimension d'une intersection



Grassmann : $\dim(F \cap G) = 6 - \dim(F + G)$. a) Comme $\dim(F + G) \leq 5$, on a

$\dim(F \cap G) \geq 1$: minimum 1. b) Si $\dim(F \cap G) = 1$, alors $\dim(F + G) = 5$, donc

$F + G = \mathbb{R}^5$ (sous-espace de dimension maximale). c) Le maximum est 3, atteint si $F = G$.

12 Noyau et image d'un endomorphisme



Noyau. $x + y = 0$ et $y + z = 0$ donnent $y = -x$, $z = x$, et la 3ème équation $x - z = 0$ est

alors vraie. Donc $\text{Ker } f = \text{Vect}((1, -1, 1))$. Image. Posons $a = x + y$, $b = y + z$: alors

$x - z = a - b$. Donc $\text{Im } f \subset \{(a, b, c) : c = a - b\}$, plan de dimension 2, de base

$((1, 0, 1), (0, 1, -1))$. Le théorème du rang donne $\text{rg } f = 3 - 1 = 2$, d'où l'égalité. f n'est ni injective (noyau non nul) ni surjective (rang 2 inférieur à 3).

13 Appliquer le théorème du rang



- a. $\text{rg } f = 3$, donc $\dim \text{Ker } f = 5 - 3 = 2$.
- b. $\text{Ker } f = \{0\}$, donc $\text{rg } f = 4 = \dim \mathbb{R}^4$: f est surjective, donc bijective.
- c. $\text{rg } f \leq \dim \mathbb{R}^3 = 3 < 5$: non, f n'est jamais surjective.

14 Interpolation et isomorphisme



- a) La linéarité vient de $(\lambda P + \mu Q)(a) = \lambda P(a) + \mu Q(a)$. Si $\varphi(P) = 0$, le polynôme P , de degré au plus 2, a trois racines distinctes $0, 1, 2$: c'est le polynôme nul. Donc $\text{Ker } \varphi = \{0\}$.
- b) Comme $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, l'injectivité entraîne la bijectivité : φ est un isomorphisme. c) $\varphi(X^2) = (0, 1, 4)$.

15 Un supplémentaire dans $\mathbb{R}^4$



Prenons $G = \text{Vect}((0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$. Les quatre vecteurs $(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$ forment une matrice triangulaire de déterminant 1, donc une base de $\mathbb{R}^4$: $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$. (Le supplémentaire n'est pas unique : $\text{Vect}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0))$ convient aussi.)

16 Un projecteur



- a) Le déterminant de $(1, 1), (1, 2)$ vaut $1 \neq 0$: c'est une base, donc $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$. On résout $(x, y) = a(1, 1) + b(1, 2)$: $a + b = x$ et $a + 2b = y$, d'où $b = y - x$ et $a = 2x - y$. b) Ainsi $p(x, y) = (2x - y)(1, 1) = (2x - y, 2x - y)$. Alors $p(p(x, y)) = p(2x - y, 2x - y) = (2(2x - y) - (2x - y))(1, 1) = (2x - y)(1, 1) = p(x, y)$: $p \circ p = p$. On a $\text{Ker } p = \{(x, y) : 2x = y\} = G$ car $p(1, 2) = 0$, et $\text{Im } p = F$.

17 Rang d'une composée



Si $f(u) = 0$, alors $g(f(u)) = g(0) = 0 : \text{Ker } f \subset \text{Ker}(g \circ f)$. Ensuite

$\text{Im}(g \circ f) = g(\text{Im } f) \subset \text{Im } g$, d'où $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg } g$. Enfin, g restreinte à $\text{Im } f$ a pour image $g(\text{Im } f)$ et le théorème du rang donne $\dim g(\text{Im } f) \leq \dim \text{Im } f$, soit $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg } f$.

Exemple : $f(x, y) = (x, y, 0)$ (rang 2) et $g(x, y, z) = (x + y, 0)$ (rang 1). Alors $g \circ f(x, y) = (x + y, 0)$ est de rang 1, strictement inférieur à $\text{rg } f = 2$.

18 Endomorphisme de carré nul



a) Si $v = u(w) \in \text{Im } u$, alors $u(v) = u(u(w)) = 0 : v \in \text{Ker } u$. b) Donc

$\text{rg } u \leq \dim \text{Ker } u = n - \text{rg } u$ (théorème du rang), d'où $2 \text{rg } u \leq n$. c) Pour $n = 5$:

$\text{rg } u \leq 2,5$, donc $\text{rg } u \leq 2$. d) $u(u(x, y, z, t)) = u(z, t, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$; l'image est $\{(z, t, 0, 0)\}$, de dimension $2 = n/2$: la borne est atteinte.

19 Hyperplan noyau d'une forme linéaire



a) $\varphi(1, 0, 0, 0) = 1$, donc $\text{Im } \varphi$ est un sous-espace non nul de $\mathbb{R}$: c'est $\mathbb{R}$, et $\text{rg } \varphi = 1$.

Alors $\dim \text{Ker } \varphi = 4 - 1 = 3$. b) Les vecteurs $(-2, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0)$, $(-3, 0, 0, 1)$ sont dans le noyau ($-2 + 2 = 0$, $1 - 1 = 0$, $-3 + 3 = 0$) et forment une famille libre (chacun possède une coordonnée non nulle propre sur les positions 2, 3, 4). Trois vecteurs libres dans un espace de dimension 3 : c'est une base. c) Une forme non nulle est de rang 1 (image non nulle dans $\mathbb{K}$), donc son noyau est de dimension $n - 1$: c'est un hyperplan.

20 Polynômes s'annulant en 1



a) $F = \text{Ker}(\text{ev}_1)$, où $\text{ev}_1 : P \mapsto P(1)$ est linéaire de E dans $\mathbb{R}$; c'est donc un sous-espace. L'évaluation est surjective ($\text{ev}_1(1) = 1$), donc $\dim F = 4 - 1 = 3$. b) Si une constante c est dans F , alors $c = c(1) = 0 : F \cap G = \{0\}$. Comme $\dim F + \dim G = 3 + 1 = 4 = \dim E$, on a $E = F \oplus G$. c) Pour tout P , $P = (P - P(1)) + P(1)$ avec $P - P(1) \in F$. Ainsi $X^3 = (X^3 - 1) + 1$, avec $X^3 - 1 \in F$ et $1 \in G$.

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 128 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de Licence L2

Changer de niveau

Niveau : Licence L2

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi



Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Espaces vectoriels et applications
linéaires : exercices de maths Licence L2

 QCM de maths

Espaces vectoriels et applications
linéaires : QCM de maths Licence L2

 Contrôles de maths

Espaces vectoriels et applications
linéaires : contrôle de maths Licence L2

 Exercices de maths

Réduction des endomorphismes :
exercices de maths Licence L2

 Exercices de maths

Espaces préhilbertiens et euclidiens :
exercices de maths Licence L2

 QCM de maths

Réduction des endomorphismes : QCM
de maths Licence L2

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage