

Espaces vectoriels : exercices corrigés de maths Licence L1 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 123 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Sous-espace ou pas ?



A : contient $(0, 0)$ et se paramètre par $(3y, y) = y(3, 1)$; c'est $\text{Vect}((3, 1))$, donc un sev.

B : $(0, 0)$ ne vérifie pas $x + y = 2$; ce n'est pas un sev.

C : $(1, 0)$ et $(0, 1)$ sont dans C , mais leur somme $(1, 1)$ vérifie $xy = 1 \neq 0$. Ce n'est pas un sev.

2 Un plan comme Vect



Un élément de F s'écrit $(x, 0, z) = x(1, 0, 0) + z(0, 0, 1)$. Donc

$$F = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 0, 1)).$$

Ces deux vecteurs sont libres (chaque coordonnée non nulle est « privée » à l'un d'eux), donc forment une base de F , et $\dim F = 2$.

3 Colinéaires ou non



Dans la première, $(3, 6) = 3(1, 2)$: relation $3u - v = 0$, la famille est liée.

Dans la seconde, si $a(1, 2) + b(2, 1) = 0$ alors $a + 2b = 0$ et $2a + b = 0$. En soustrayant deux fois la première à la seconde : $-3b = 0$, donc $b = 0$ puis $a = 0$. La famille est libre.

4 Coordonnées dans une base



Deux vecteurs non colinéaires dans un espace de dimension 2 forment une base : $(1, -1)$ n'est pas multiple de $(1, 1)$.

On cherche a, b avec $a + b = 5$ et $a - b = 1$, donc $a = 3$ et $b = 2$. Les coordonnées de $(5, 1)$ sont $(3, 2)$: $(5, 1) = 3(1, 1) + 2(1, -1)$.

5 Dimensions à connaître



$$\dim \mathbb{R}_4[X] = 5 \text{ (base } 1, X, X^2, X^3, X^4).$$

$$\dim \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}) = 3 \times 2 = 6.$$

Les éléments de $\{x = t\}$ sont $(x, y, z, x) = x(1, 0, 0, 1) + y(0, 1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 0)$: dimension 3.

$\mathbb{C}$ a pour base $(1, i)$ sur $\mathbb{R}$: dimension 2.

6 Génératrice mais pas libre



Génératrice : $(1, 0)$ et $(0, 1)$ engendrent déjà $\mathbb{R}^2$, donc la famille entière aussi.

Libre : non, car **3** vecteurs en dimension **2** forment toujours une famille liée. Explicitement, $(1, 0) - (1, 1) + (0, 1) = (0, 0)$.

7 Somme directe ?



$(2, 4) = 2(1, 2)$, donc $G = F$ et $F \cap G = F \neq \{0\}$: la somme n'est pas directe.

Pour F et H : si $t(1, 2) = s(0, 1)$, la première coordonnée donne $t = 0$ puis $s = 0$. Donc $F \cap H = \{0\}$, la somme est directe, et comme $1 + 1 = 2$ on a même $\mathbb{R}^2 = F \oplus H$.

8 Une droite dans l'espace



La condition $x - y = 0$ donne $y = x$, puis $x + x + z = 0$ donne $z = -2x$. Ainsi $(x, y, z) = (x, x, -2x) = x(1, 1, -2)$.

$E_1 = \text{Vect}((1, 1, -2))$, avec $(1, 1, -2) \neq 0$: c'est une base, et $\dim E_1 = 1$. Vérification : $1 + 1 - 2 = 0$ et $1 - 1 = 0$.

9 Polynômes qui s'annulent en 1



Pour $P = a + bX + cX^2 + dX^3$, la condition $P(1) = 0$ s'écrit $a + b + c + d = 0$, soit $a = -b - c - d$. Donc $P = b(X - 1) + c(X^2 - 1) + d(X^3 - 1)$.

Ainsi $F = \text{Vect}(X - 1, X^2 - 1, X^3 - 1)$: c'est un sev. La famille est libre car ses polynômes ont des degrés distincts **1, 2, 3** (une combinaison nulle force d'abord $d = 0$, puis $c = 0$, puis $b = 0$). Base de F de **3** éléments, donc $\dim F = 3$ (en accord avec $\dim \mathbb{R}_3[X] - 1 = 3$).

10 Un paramètre dans une famille



On étudie $\alpha u + \beta v + \gamma w_m = 0$, c'est-à-dire $\alpha + 2\beta + \gamma = 0$, $2\alpha + \beta - \gamma = 0$, $\alpha + 3\beta + m\gamma = 0$.

En additionnant les deux premières équations : $3\alpha + 3\beta = 0$, donc $\beta = -\alpha$. La première donne alors $\gamma = \alpha$. La troisième devient $\alpha - 3\alpha + m\alpha = (m - 2)\alpha = 0$.

Si $m \neq 2$, alors $\alpha = 0$, et tous les coefficients sont nuls : famille libre. Si $m = 2$, α est libre : par exemple $u - v + w_2 = 0$ puisque $w_2 = v - u$. La famille est liée si et seulement si $m = 2$.

11 Une base de l'espace



Si $a(1, 1, 0) + b(0, 1, 1) + c(1, 0, 1) = 0$, alors $a + c = 0$, $a + b = 0$, $b + c = 0$. En additionnant : $a + b + c = 0$, donc $a = (a + b + c) - (b + c) = 0$, et de même $b = c = 0$. La famille est libre, avec $3 = \dim \mathbb{R}^3$ vecteurs : c'est une base.

Pour $(2, 4, 6)$: $a + c = 2$, $a + b = 4$, $b + c = 6$ donnent $a + b + c = 6$, d'où $b = 4$, $c = 2$, $a = 0$. Coordonnées : $(0, 4, 2)$.

12 Vrai ou faux ?



- a. Faux en général : avec les axes $D_1 = \text{Vect}((1, 0))$ et $D_2 = \text{Vect}((0, 1))$, les vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$ sont dans $D_1 \cup D_2$ mais pas leur somme $(1, 1)$.
- b. Vrai : 0 est dans les deux, et une combinaison linéaire de deux éléments de l'intersection reste dans chacun des deux sev.
- c. Vrai : une famille libre de $\mathbb{R}^3$ a au plus 3 vecteurs.
- d. Vrai : une base de F est libre dans E avec $\dim E$ éléments, donc c'est une base de E , et $F = E$.

13 Un supplémentaire du plan $x + y + z = 0$



F est de dimension 2 : $(x, y, z) = (x, y, -x - y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$, famille libre de deux vecteurs. Et $\dim G = 1$.

Si $(t, t, t) \in F$, alors $3t = 0$, donc $t = 0 : F \cap G = \{0\}$. Comme $\dim F + \dim G = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, on conclut $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

14 Formule de Grassmann



$\dim F = 3$ et $\dim G = 2$. La somme $F + G$ contient e_1, e_2, e_3, e_4 , donc $F + G = \mathbb{R}^4$ et $\dim(F + G) = 4$.

Grassmann : $\dim(F \cap G) = 3 + 2 - 4 = 1$; on voit effectivement que $F \cap G = \text{Vect}(e_3)$. Comme l'intersection n'est pas réduite à $\{0\}$, la somme n'est pas directe.

15 Compléter en une base de $\mathbb{R}^4$



On essaie $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ et $e_4 = (0, 0, 0, 1)$. Supposons

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 e_1 + \lambda_4 e_4 = 0.$$

Troisième coordonnée : $\lambda_2 = 0$. Deuxième : $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, donc $\lambda_1 = 0$. Première :

$$2\lambda_1 + \lambda_3 = 0, \text{ donc } \lambda_3 = 0. \text{ Quatrième : } \lambda_1 + \lambda_4 = 0, \text{ donc } \lambda_4 = 0.$$

Les quatre vecteurs forment une famille libre à $4 = \dim \mathbb{R}^4$ éléments : (v_1, v_2, e_1, e_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.

16 Un supplémentaire dans $\mathbb{R}^4$

★★★

En additionnant les deux équations : $2(x + z) = 0$, donc $z = -x$. En les soustrayant :

$2(y + t) = 0$, donc $t = -y$. Ainsi

$$(x, y, z, t) = (x, y, -x, -y) = x(1, 0, -1, 0) + y(0, 1, 0, -1).$$

Ces deux vecteurs sont libres (coordonnées 1 et 2), donc forment une base de F , et $\dim F = 2$.

Si un vecteur $(x, y, -x, -y)$ de F est dans $G = \{z = t = 0\}$, alors $-x = 0$ et $-y = 0$: $F \cap G = \{0\}$. Et $\dim F + \dim G = 4$, donc $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.

17 Un changement de base polynomial

★★★

Les trois polynômes ont des degrés 0, 1, 2 distincts, donc la famille est libre : une combinaison nulle force à annuler d'abord le coefficient de $(X - 1)^2$, puis celui de $X - 1$, puis celui de 1. Elle a $3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$ éléments : c'est une base.

On cherche $P = a + b(X - 1) + c(X - 1)^2 = cX^2 + (b - 2c)X + (a - b + c)$. Par identification : $c = 1$, $b - 2 = -3$ donc $b = -1$, et $a + 1 + 1 = 5$ donc $a = 3$.

Coordonnées : $(3, -1, 1)$, c'est-à-dire $P = 3 - (X - 1) + (X - 1)^2$.

18 Symétriques et antisymétriques

★★★

$\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont des sev (conditions linéaires). Si $M \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}$, alors $M^T = M = -M$, donc $M = 0$: somme directe.

Tout M s'écrit $M = \frac{M + M^T}{2} + \frac{M - M^T}{2}$, avec le premier terme symétrique et le second antisymétrique : $\mathcal{S} + \mathcal{A} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donc $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$ (dimensions $3 + 1 = 4$).

Pour M : $\frac{M + M^T}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 3,5 \\ 3,5 & 3 \end{pmatrix}$ et $\frac{M - M^T}{2} = \begin{pmatrix} 0 & -1,5 \\ 1,5 & 0 \end{pmatrix}$. Leur somme redonne bien M .

19 Somme directe et bases

★★★★

Génératrice. Tout élément de $F + G$ s'écrit $f + g$; en développant f sur les f_i et g sur les g_j , on l'écrit comme combinaison de la famille réunie.

Libre. Supposons $\sum a_i f_i + \sum b_j g_j = 0$. Alors $x = \sum a_i f_i = -\sum b_j g_j$ appartient à $F \cap G = \{0\}$, donc $x = 0$. Les deux familles étant libres, tous les a_i et tous les b_j sont nuls.

Conclusion : c'est une base, et $\dim(F \oplus G) = r + s = \dim F + \dim G$.

20 Intersection de deux plans

★★★★

Le système $x + y + z = 0, x - y + 2z = 0$ donne, en additionnant, $2x + 3z = 0$. On pose $z = 2s$: $x = -3s$, puis $y = -x - z = 3s - 2s = s$. Donc $P_1 \cap P_2 = \text{Vect}((-3, 1, 2))$.

Vérification : $-3 + 1 + 2 = 0$ et $-3 - 1 + 4 = 0$. Le vecteur est non nul : base de $P_1 \cap P_2$, qui est de dimension 1.

Grassmann : $\dim(P_1 + P_2) = 2 + 2 - 1 = 3$, donc $P_1 + P_2 = \mathbb{R}^3$, mais la somme n'est pas directe.

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 123 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

 **Zyro te conseille la suite**



Exercices de maths

Espaces vectoriels : exercices de maths
Licence L1



QCM de maths

Espaces vectoriels : QCM de maths
Licence L1



Contrôles de maths

Espaces vectoriels : contrôle de maths
Licence L1



Exercices de maths

Applications linéaires et matrices :
exercices de maths Licence L1



Exercices de maths

Déterminants : exercices de maths
Licence L1



QCM de maths

Applications linéaires et matrices : QCM
de maths Licence L1

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage