

Espaces vectoriels et applications linéaires : corrigé du contrôle de maths Maths Sup à télécharger en PDF



Le livre de contrôles corrigés de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 50 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

Corrigé du contrôle avec le barème détaillé. Compte tes points et repère ce qu'il faut revoir.

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice autorisée seulement quand l'énoncé le précise.

1

Un sous-espace de $\mathbb{R}^3$

/ 3 pts

$(0, 0, 0) \in F$ (0,5 pt). Pour $u = (x, y, z)$, $u' = (x', y', z') \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$2(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$, donc $\lambda u + \mu u' \in F$ (1,5 pt).

Base : $z = y - 2x$, donc $(x, y, z) = x(1, 0, -2) + y(0, 1, 1)$. Cette famille engendre F et est libre (coordonnées x et y indépendantes) : c'est une base, **dim** $F = 2$ (1 pt).

2 Famille libre ou liée

/ 3 pts

On remarque $2u_1 - u_2 = (2 - 2, 2 + 1, 4 - 0) = (0, 3, 4) = u_3$ (1 pt). La famille est donc liée (0,5 pt).

(u_1, u_2) est libre : $au_1 + bu_2 = 0$ donne $a + 2b = 0, a - b = 0$, d'où $a = b = 0$ (1 pt).

Comme $u_3 \in \text{Vect}(u_1, u_2)$, $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3) = \text{Vect}(u_1, u_2)$, de dimension 2 (0,5 pt).

3 Noyau, image, rang

/ 4 pts

- a. Si $f(x, y, z) = 0 : x + y + z = 0$ et $2x + y - z = 0$; en additionnant, $3x + 2y = 0$, ce qui rend la troisième équation redondante. Avec $x = 2\lambda : y = -3\lambda, z = \lambda$. Donc $\text{Ker } f = \text{Vect}((2, -3, 1))$ (1,5 pt).
- b. Théorème du rang : $\text{rg } f = 3 - 1 = 2$ (0,5 pt). La troisième composante de $f(x, y, z)$ est la somme des deux premières, donc $\text{Im } f \subset \{(a, b, c) \mid c = a + b\}$, plan de dimension 2 : égalité (1 pt).
- c. $\text{Ker } f \neq \{0\}$: f n'est pas injective ; $\text{rg } f = 2 < 3$: f n'est pas surjective (1 pt).

4 Un projecteur de $\mathbb{R}^3$

/ 4 pts

- a. p est linéaire. $p(p(x, y, z)) = p(x, y, x + y) = (x, y, x + y) = p(x, y, z)$, donc $p \circ p = p$ (1 pt).
- b. $\text{Im } p = \{(a, b, a + b)\} = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 1))$, plan d'équation $z = x + y$ (1,5 pt). $p(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$, donc $\text{Ker } p = \text{Vect}((0, 0, 1))$ (1 pt).
- c. $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$ (droite et plan supplémentaires, $1 + 2 = 3$) (0,5 pt).

5 Polynômes à deux racines

/ 3 pts

F est l'intersection des noyaux des formes linéaires $P \mapsto P(0)$ et $P \mapsto P(1)$: c'est un sev (1 pt).

Pour $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$: $P(0) = d = 0$ et $P(1) = a + b + c = 0$, soit $c = -a - b$. Donc $P = a(X^3 - X) + b(X^2 - X)$ (1 pt).

La famille $(X^3 - X, X^2 - X)$ est libre (degrés différents) et génératrice de F : c'est une base, $\dim F = 2$ (1 pt).

6 Questions rapides

/ 3 pts

- Vrai : on a $\dim \text{Ker} = 4 - 3 = 1$; par exemple $(x, y, z, t) \mapsto (x, y, z)$ est surjective de noyau $\text{Vect}((0, 0, 0, 1))$ (1 pt).
- Faux : si f est injective, $\text{rg } f = 3$, mais $\text{rg } f \leq \dim \mathbb{R}^2 = 2$ (1 pt).
- Faux : une famille de quatre vecteurs est liée mais pas forcément génératrice, par exemple quatre multiples de $(1, 0, 0)$ n'engendrent qu'une droite (1 pt).

Le livre de contrôles corrigés de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 50 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

 Zyro te conseille la suite

 Contrôles de maths

Espaces vectoriels et applications
linéaires : contrôle de maths Maths Sup

 Cours de maths

Espaces vectoriels et applications
linéaires : cours de maths Maths Sup

 QCM de maths

Espaces vectoriels et applications
linéaires : QCM de maths Maths Sup

 Contrôles de maths

Matrices et déterminants : contrôle de
maths Maths Sup

 Contrôles de maths

Dénombrement et probabilités : contrôle
de maths Maths Sup

 Cours de maths

Matrices et déterminants : cours de
maths Maths Sup

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage