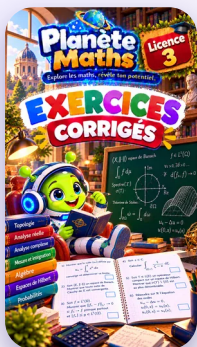


Espaces L_p et espaces de Hilbert : exercices de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

21 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

1 Normes de la fonction identité

★ ★ ★

Sur $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue, on considère $f(x) = x$. Calculer $\|f\|_p$ pour $p = 1$, $p = 2$ et $p = 4$, puis ranger ces trois nombres.

2 Trois normes d'un vecteur

★ ★ ★

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $x = (3, -4, 12)$. Calculer $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ et $\|x\|_\infty$.

3 Cauchy-Schwarz et Minkowski sur un exemple



Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, soit $x = (1, 2, 3)$ et $y = (4, -1, 2)$. Calculer $\langle x, y \rangle$, $\|x\|_2$, $\|y\|_2$ et vérifier numériquement l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Minkowski pour $p = 2$.

4 Pourquoi $p = 1/2$ ne donne pas une norme



Pour $x \in \mathbb{R}^2$, on pose $N(x) = (|x_1|^{1/2} + |x_2|^{1/2})^2$. Montrer que N ne vérifie pas l'inégalité triangulaire en choisissant $x = (1, 0)$ et $y = (0, 1)$.

5 La norme 1 n'est pas euclidienne



Dans $\mathbb{R}^2$, on prend $x = (1, 0)$ et $y = (0, 1)$. Calculer les deux membres de l'identité du parallélogramme pour la norme $\|\cdot\|_1$. Que peut-on en conclure ?

6 Projeter sur la droite des vecteurs constants



Dans $\mathbb{R}^4$ euclidien, soit $x = (1, 2, 3, 4)$ et $F = \text{Vect}(u)$ avec $u = (1, 1, 1, 1)$. Déterminer $p_F(x)$ et la distance de x à F .

7 Un bord d'intégrabilité



Soit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0, 1]$. Pour quelles valeurs de $p \in [1, \infty[$ a-t-on $f \in L^p([0, 1])$? Calculer $\|f\|_1$. La même fonction est-elle dans $L^2([1, +\infty[)$?

8 Inclusion $L^3 \subset L^2$ sur $[0, 1]$



Soit $f \in L^3([0, 1])$. En appliquant l'inégalité de Hölder à $|f|^2$ et à la fonction constante 1 avec les exposants $\frac{3}{2}$ et 3, montrer que $\|f\|_2 \leq \|f\|_3$. Vérifier avec $f(x) = x$.

9 Une somme de série par Cauchy-Schwarz



Dans ℓ^2 , on considère $a_n = \frac{1}{n}$ et $b_n = \frac{1}{2^n}$ pour $n \geq 1$. Calculer $\|b\|_2$, admettre $\|a\|_2 = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n2^n} = \ln 2$, puis vérifier l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\sum a_n b_n \leq \|a\|_2 \|b\|_2$.

10 Norme d'une forme linéaire sur L^2



Sur $L^2([0, 1])$, soit $\varphi(f) = \int_0^1 (1-t)f(t) dt$. Justifier que φ est continue, calculer $\|\varphi\|$ et donner une fonction f de norme 1 pour laquelle $\varphi(f) = \|\varphi\|$.

11 Meilleure approximation par une constante



Dans $L^2([0, 1])$, déterminer la projection orthogonale de $f(t) = t^2$ sur le sous-espace des fonctions constantes et la distance de f à ce sous-espace.

12 Orthonormalisation de Gram-Schmidt



Dans $L^2([-1, 1])$, on part de $1, t, t^2$. Construire par le procédé de Gram-Schmidt une famille orthonormée (e_0, e_1, e_2) .

13 La boule unité de ℓ^2 n'est pas compacte



Soit e_n la suite de ℓ^2 dont tous les termes sont nuls sauf le n -ième, égal à 1. Calculer $\|e_n - e_m\|_2$ pour $n \neq m$. En déduire que la boule unité fermée de ℓ^2 n'est pas compacte.

14 Inclusion des espaces de suites



Soit $1 \leq p \leq q < \infty$ et $x \in \ell^p$. Montrer que $\|x\|_q \leq \|x\|_p$. Vérifier pour $x = (3, 4, 0, 0, \dots)$ avec $p = 1, p = 2, q = 4$.

15 Coefficients de t dans la base des sinus



On munit $L^2(]0, 1[)$ de la base hilbertienne $e_n(t) = \sqrt{2} \sin(n\pi t)$. Calculer les coefficients de $f(t) = t$ et en déduire la valeur de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ par l'égalité de Parseval.

16 Une forme linéaire non continue



Sur $L^2(]0, 1[)$, on voudrait poser $\varphi(f) = \int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t}} dt$. Pour $\varepsilon \in]0, 1[$, on définit $f_\varepsilon = t^{-1/2} \mathbf{1}_{[\varepsilon, 1]}$. Calculer $\varphi(f_\varepsilon)$ et $\|f_\varepsilon\|_2$, puis conclure sur la continuité de φ . Quel théorème cela illustre-t-il ?

17 Cas d'égalité dans Hölder sur $\mathbb{R}^3$



Dans $\mathbb{R}^3$, soit $a = (1, 4, 9)$ et $\varphi(x) = \sum a_i x_i$. On munit $\mathbb{R}^3$ de la norme $\|\cdot\|_3$; l'exposant conjugué de 3 est $q = \frac{3}{2}$. Calculer $\|a\|_{3/2}$, puis trouver x avec $\|x\|_3 = 1$ tel que $\varphi(x) = \|a\|_{3/2}$.

18 Un hyperplan fermé et son orthogonal



Dans $L^2(]0, 1[)$, soit $F = \left\{ f : \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\}$. Montrer que F est fermé, déterminer $F^\perp$, puis la projection de $f(t) = t^2$ sur F et sa distance à F .

19 Reste de la décomposition de 1

★★★★

On reprend $f = 1$ dans $L^2([0, 1])$ et la base $e_n = \sqrt{2} \sin(n\pi t)$, avec $\langle f, e_n \rangle = \frac{2\sqrt{2}}{n\pi}$ pour n impair et 0 pour n pair. Soit S la projection de f sur $\text{Vect}(e_1, e_3)$. Calculer $\|f - S\|^2$ et donner une valeur approchée.

20 Une inégalité de Cauchy-Schwarz entre L^4 et L^2

★★★★

Montrer que $\|fg\|_2 \leq \|f\|_4 \|g\|_4$. Vérifier l'inégalité pour $f(x) = x$ et $g(x) = 1 - x$ sur $[0, 1]$.

21 $C([0, 1])$ n'est pas complet pour la norme L^2

★★★★

Pour $n \geq 2$, soit f_n continue sur $[0, 1]$, nulle sur $[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}]$, égale à $n(t - \frac{1}{2}) + 1$ sur $[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}]$ et à 1 sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Soit $g = \mathbf{1}_{[1/2, 1]}$. Calculer $\|f_n - g\|_2$. Montrer que (f_n) est de Cauchy pour $\|\cdot\|_2$ mais ne converge pas dans $C([0, 1])$.

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

 Zyro te conseille la suite

✓ Exercices corrigés de maths

Espaces L_p et espaces de Hilbert :
exercices corrigés de maths Licence L3

■ Cours de maths

Espaces L_p et espaces de Hilbert : cours
de maths Licence L3

🎯 QCM de maths

Espaces L_p et espaces de Hilbert : QCM
de maths Licence L3

✓ Exercices corrigés de maths

Séries de Fourier : exercices corrigés de
maths Licence L3

✓ Exercices corrigés de maths

Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$: exercices
corrigés de maths Licence L3

■ Cours de maths

Séries de Fourier : cours de maths
Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage