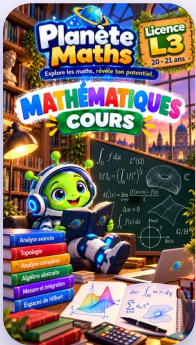


Espaces L^p et espaces de Hilbert : cours de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 101 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Dans ce chapitre, on mesure la « taille » d'une fonction ou d'une suite par une norme intégrale, et on découvre que, parmi tous ces espaces, un seul possède une géométrie euclidienne complète : l'espace L^2 . C'est lui qui permet de projeter, de décomposer en séries de Fourier et de représenter les formes linéaires. Le cadre est un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$; les deux cas concrets sont l'intervalle $[a, b]$ muni de la mesure de Lebesgue et l'ensemble $\mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage (espaces ℓ^p).

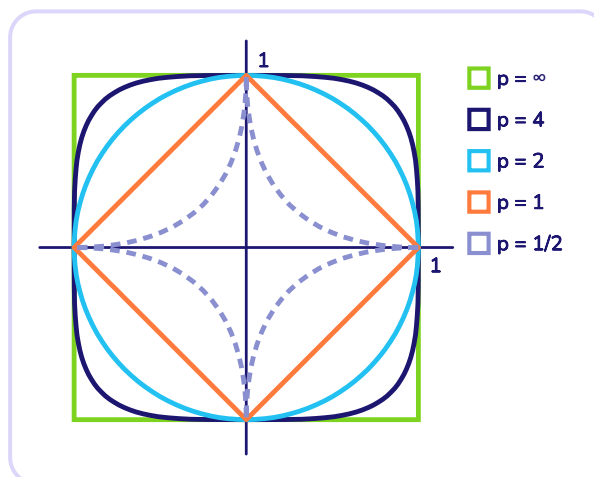
1. Les normes $\|\cdot\|_p$ et les espaces L^p

D Définition (espace L^p)

Pour $1 \leq p < \infty$, on pose $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$ et $L^p(\mu)$ est l'ensemble des (classes de) fonctions mesurables telles que $\|f\|_p < \infty$. Pour $p = \infty$, $\|f\|_\infty$ est le supremum essentiel de $|f|$. Deux fonctions égales presque partout sont identifiées : sans cette convention, $\|f\|_p = 0$ n'entraînerait pas $f = 0$.

Dans le cas de la mesure de comptage, on obtient les espaces de suites ℓ^p , avec

$\|x\|_p = \left(\sum_n |x_n|^p \right)^{1/p}$. Dans $\mathbb{R}^2$, la boule unité pour $\|\cdot\|_p$ change de forme avec p : losange pour $p = 1$, disque pour $p = 2$, carré à la limite $p = \infty$.



Attention : $p \geq 1$ est indispensable

Pour $p < 1$ la formule ci-dessus ne définit plus une norme : la boule unité n'est plus convexe (courbe en pointillés sur la figure) et l'inégalité triangulaire échoue.

2. Inégalités de Young, de Hölder et de Minkowski

Deux exposants $p, q \in]1, \infty[$ sont dits **conjugués** si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Par exemple $p = 3$ a pour conjugué $q = \frac{3}{2}$, et $p = 2$ est son propre conjugué.

P

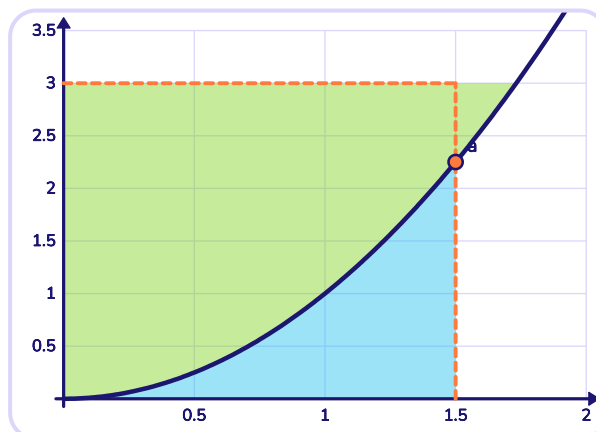
Inégalités fondamentales

a. **Young.** Pour $a, b \geq 0$: $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

b. **Hölder.** Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$, alors $fg \in L^1$ et $\int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$. Pour $p = q = 2$ c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

c. **Minkowski.** Pour $p \geq 1$: $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. Ainsi $\|\cdot\|_p$ est bien une norme.

Idée de la preuve. L'inégalité de Young exprime que le rectangle de côtés a et b est recouvert par l'aire sous la courbe $y = x^{p-1}$ (entre 0 et a) et l'aire à gauche de cette courbe (entre 0 et b) ; la figure ci-dessous l'illustre pour $p = 3$. Pour Hölder, on suppose $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$, on applique Young à $|f(x)|$ et $|g(x)|$ puis on intègre : $\int |fg| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; le cas général s'obtient par homogénéité. Pour Minkowski, on écrit $|f + g|^p \leq |f| |f + g|^{p-1} + |g| |f + g|^{p-1}$, on applique Hölder à chaque terme avec $|f + g|^{p-1} \in L^q$, puis on simplifie.



E Exemple 1 : intégrabilité de $x^{-1/3}$

Soit $f(x) = x^{-1/3}$ sur $]0, 1]$. Alors $|f|^p = x^{-p/3}$ est intégrable en 0 si et seulement si $\frac{p}{3} < 1$, c'est-à-dire $p < 3$. Donc $f \in L^2$ avec $\|f\|_2^2 = \int_0^1 x^{-2/3} dx = 3$, soit $\|f\|_2 = \sqrt{3}$, mais $f \notin L^3$. Sur $[1, +\infty[$ la situation s'inverse : $f \in L^p$ si et seulement si $p > 3$.

3. Complétude et inclusions

P Théorème (Riesz–Fischer)

Pour $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $L^p(\mu)$ est complet : c'est un espace de Banach. De plus, une suite qui converge dans L^p possède une sous-suite qui converge presque partout vers la même limite.

Les inclusions dépendent de la mesure. Si $\mu(X) < \infty$, alors $L^q \subset L^p$ pour $p \leq q$, grâce à Hölder : $\|f\|_p \leq \mu(X)^{1/p-1/q} \|f\|_q$. Pour la mesure de comptage c'est l'inverse : $\ell^p \subset \ell^q$ pour $p \leq q$, avec $\|x\|_q \leq \|x\|_p$. Dans les deux cas, aucune inclusion n'est une égalité : l'exemple 1 montre une fonction de $L^2([0, 1])$ hors de L^3 .

4. Produit scalaire et espaces de Hilbert

D Définition (espace de Hilbert)

Un **espace préhilbertien** est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, qui induit la norme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. C'est un **espace de Hilbert** s'il est complet pour cette norme.

L'espace $L^2(\mu)$ est un espace de Hilbert pour $\langle f, g \rangle = \int f \bar{g} d\mu$, et ℓ^2 en est le modèle discret. On dispose de l'inégalité de Cauchy–Schwarz $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, du théorème de Pythagore ($x \perp y \Rightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$) et de l'identité du parallélogramme :

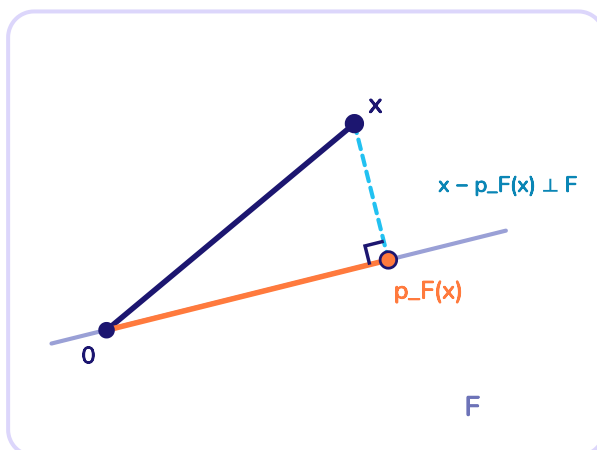
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Cette identité caractérise les normes issues d'un produit scalaire : elle est fausse dans L^p dès que $p \neq 2$. Ainsi L^2 est le seul espace de Hilbert de la famille.

5. Projection orthogonale

P Théorème de projection

Soit F un sous-espace vectoriel **fermé** d'un espace de Hilbert H . Pour tout $x \in H$, il existe un unique $p_F(x) \in F$ tel que $\|x - p_F(x)\| = d(x, F)$. Il est caractérisé par $x - p_F(x) \in F^\perp$. On a alors $H = F \oplus F^\perp$ et $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$.



M

Méthode : projeter sur un sous-espace de dimension finie

1. Choisir une famille génératrice $(u_1, \dots, u_k)$ de F et écrire $p_F(x) = \sum_j a_j u_j$.
2. Traduire $x - p_F(x) \perp u_i$ pour tout i : on obtient le système

$$\sum_j a_j \langle u_j, u_i \rangle = \langle x, u_i \rangle.$$
3. Résoudre, puis calculer la distance par $d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$.

E

Exemple 2 : projeter t^2 sur les polynômes de degré au plus 1

Dans $L^2([0, 1])$, cherchons $p = a + bt$, projection de $f(t) = t^2$ sur $F = \text{Vect}(1, t)$.
 Les conditions $\langle f - p, 1 \rangle = 0$ et $\langle f - p, t \rangle = 0$ donnent $\frac{1}{3} - a - \frac{b}{2} = 0$ et $\frac{1}{4} - \frac{a}{2} - \frac{b}{3} = 0$, d'où $b = 1$ et $a = -\frac{1}{6}$. Donc $p_F(f) = t - \frac{1}{6}$. La distance vérifie

$$d(f, F)^2 = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt = \frac{1}{180}.$$

6. Bases hilbertiennes

D

Définition (base hilbertienne)

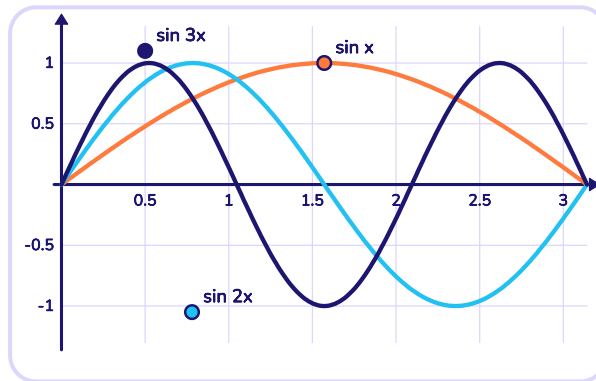
Une famille orthonormée $(e_n)_{n \geq 1}$ de H est une **base hilbertienne** si l'espace engendré par les e_n est dense dans H . Alors tout $x \in H$ s'écrit $x = \sum_n \langle x, e_n \rangle e_n$ (convergence dans H).

P

Bessel et Parseval

Pour toute famille orthonormée, $\sum_n |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ (Bessel). Pour une base hilbertienne, il y a égalité : $\|x\|^2 = \sum_n |\langle x, e_n \rangle|^2$ (Parseval). L'application $x \mapsto (\langle x, e_n \rangle)_n$ est alors une isométrie de H sur ℓ^2 : tout espace de Hilbert séparable de dimension infinie est « le même » que ℓ^2 .

Sur $]0, 1[$, la famille $e_n(t) = \sqrt{2} \sin(n\pi t)$, $n \geq 1$, est une base hilbertienne de $L^2([0, 1])$; la figure montre les profils $\sin(nx)$ sur $]0, \pi[$, qui oscillent de plus en plus vite et sont deux à deux orthogonaux.



E

Exemple 3 : une somme de série par Parseval

Prenons $f = 1$ dans $L^2([0, 1])$. Alors

$$\langle f, e_n \rangle = \sqrt{2} \int_0^1 \sin(n\pi t) dt = \frac{\sqrt{2} (1 - (-1)^n)}{n\pi}, \text{ nul pour } n \text{ pair et égal à } \frac{2\sqrt{2}}{n\pi}$$

pour n impair. Comme $\|f\|^2 = 1$, Parseval donne $\sum_{n \text{ impair}} \frac{8}{n^2 \pi^2} = 1$, soit

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

7. Théorème de représentation de Riesz

P Théorème de Riesz–Fréchet

Soit H un espace de Hilbert et $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Il existe un unique $a \in H$ tel que $\varphi(x) = \langle x, a \rangle$ pour tout x , et $\|\varphi\| = \|a\|$.

La preuve utilise la projection : si $\varphi \neq 0$, son noyau est un hyperplan fermé ; on prend u unitaire orthogonal à ce noyau et on pose $a = \varphi(u)u$. Le même principe vaut pour les espaces L^p avec $1 < p < \infty$: toute forme linéaire continue s'écrit $\varphi(f) = \int fg d\mu$ avec $g \in L^q$, q conjugué de p , et $\|\varphi\| = \|g\|_q$. On dit que le dual de L^p est L^q .

E Exemple 4 : norme d'une forme linéaire

Sur $L^2([0, 1])$, soit $\varphi(f) = \int_0^1 t f(t) dt$. Elle s'écrit $\langle f, a \rangle$ avec $a(t) = t$, donc $\|\varphi\| = \|a\|_2 = \left(\int_0^1 t^2 dt \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. La borne est atteinte pour $f = a/\|a\|_2 = \sqrt{3}t$: on vérifie $\varphi(f) = \sqrt{3}/3$.

! Le conseil de Zyro

Sur ma planète, on dit : « pour une norme, cherche d'abord l'égalité dans Cauchy–Schwarz ». La forme linéaire est maximale quand f est proportionnelle à a : c'est exactement la direction que le théorème de Riesz désigne.

À retenir

- $\|f\|_p = (\int |f|^p)^{1/p}$ est une norme si et seulement si $p \geq 1$; L^p est complet (Riesz–Fischer).
- Hölder : $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; Minkowski : l'inégalité triangulaire dans L^p .
- Mesure finie : $L^q \subset L^p$ pour $p \leq q$; suites : $\ell^p \subset \ell^q$ pour $p \leq q$.
- Hilbert = préhilbertien complet ; L^2 l'est, avec l'identité du parallélogramme.
- Projection sur un fermé F : $x - p_F(x) \in F^\perp$, et $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$.
- Base hilbertienne : $x = \sum \langle x, e_n \rangle e_n$ et Parseval $\|x\|^2 = \sum |\langle x, e_n \rangle|^2$.
- Riesz : toute forme linéaire continue est $\langle \cdot, a \rangle$, avec $\|\varphi\| = \|a\|$.

Le livre de cours de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 101 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

 **Zyro te conseille la suite**

 Exercices de maths

Espaces L_p et espaces de Hilbert :
exercices de maths Licence L3

 Contrôles de maths

Espaces L_p et espaces de Hilbert :
contrôle de maths Licence L3

 QCM de maths

Espaces L_p et espaces de Hilbert : QCM
de maths Licence L3

 Exercices de maths

Séries de Fourier : exercices de maths
Licence L3

 Exercices de maths

Calcul différentiel dans R^n : exercices de
maths Licence L3

 Contrôles de maths

Séries de Fourier : contrôle de maths
Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage