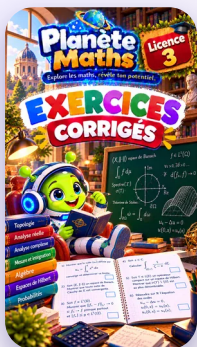


Espaces L_p et espaces de Hilbert : exercices corrigés de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Normes de la fonction identité



Pour $p \geq 1$, $\int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}$, donc $\|f\|_p = \left(\frac{1}{p+1}\right)^{1/p}$.

$\|f\|_1 = \frac{1}{2}$, $\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577$, $\|f\|_4 = \left(\frac{1}{5}\right)^{1/4} \approx 0,669$.

Donc $\|f\|_1 < \|f\|_2 < \|f\|_4$: sur un espace de mesure 1, la norme $\|\cdot\|_p$ croît avec p .

2 Trois normes d'un vecteur



$\|x\|_1 = 3 + 4 + 12 = 19$. $\|x\|_2 = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$.

$\|x\|_\infty = \max(3, 4, 12) = 12$.

On constate $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$, conformément à l'inclusion $\ell^p \subset \ell^q$ pour $p \leq q$.

3

Cauchy-Schwarz et Minkowski sur un exemple

★☆☆

$$\langle x, y \rangle = 4 - 2 + 6 = 8, \|x\|_2 = \sqrt{14}, \|y\|_2 = \sqrt{21}.$$

Cauchy-Schwarz : $|8| \leq \sqrt{14 \times 21} = \sqrt{294} \approx 17,15$. Vrai.

Minkowski : $x + y = (5, 1, 5)$, donc $\|x + y\|_2 = \sqrt{51} \approx 7,14$, et $\|x\|_2 + \|y\|_2 \approx 3,74 + 4,58 = 8,32$. On a bien $7,14 \leq 8,32$.

4

Pourquoi $p = 1/2$ ne donne pas une norme

★☆☆

$N(x) = 1, N(y) = 1$, mais $x + y = (1, 1)$ et $N(x + y) = (1 + 1)^2 = 4$.

Comme $4 > N(x) + N(y) = 2$, l'inégalité triangulaire est fautive : N n'est pas une norme. C'est la raison pour laquelle on impose $p \geq 1$.

5

La norme 1 n'est pas euclidienne

★☆☆

$\|x + y\|_1 = 2$ et $\|x - y\|_1 = 2$, donc $\|x + y\|_1^2 + \|x - y\|_1^2 = 8$.

D'autre part $2\|x\|_1^2 + 2\|y\|_1^2 = 2 + 2 = 4$. Les deux membres diffèrent : la norme $\|\cdot\|_1$ ne provient d'aucun produit scalaire.

6

Projeter sur la droite des vecteurs constants

★☆☆

$$p_F(x) = \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u = \frac{10}{4} u = (2,5; 2,5; 2,5; 2,5).$$

Alors $x - p_F(x) = (-1,5; -0,5; 0,5; 1,5)$, et $d(x, F)^2 = 2,25 + 0,25 + 0,25 + 2,25 = 5$, donc $d(x, F) = \sqrt{5} \approx 2,24$.

7 Un bord d'intégrabilité



$\int_0^1 x^{-p/2} dx$ converge si et seulement si $\frac{p}{2} < 1$, c'est-à-dire $p < 2$. Donc $f \in L^p$ pour $1 \leq p < 2$ seulement.

$$\|f\|_1 = \int_0^1 x^{-1/2} dx = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2.$$

Sur $[1, +\infty[$, $\int_1^{+\infty} x^{-1} dx$ diverge, donc $f \notin L^2([1, +\infty[)$; en revanche $f \in L^p([1, +\infty[)$ dès que $p > 2$.

8 Inclusion $L^3 \subset L^2$ sur $[0,1]$



Les exposants $\frac{3}{2}$ et 3 sont conjugués car $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$. Alors

$$\int_0^1 |f|^2 \cdot 1 dx \leq \left(\int_0^1 |f|^3 \right)^{2/3} \left(\int_0^1 1^3 \right)^{1/3} = \|f\|_3^2.$$

D'où $\|f\|_2 \leq \|f\|_3$, et en particulier $L^3 \subset L^2$.

Pour $f(x) = x$: $\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577$ et $\|f\|_3 = \left(\frac{1}{4}\right)^{1/3} \approx 0,630$. On a bien $0,577 \leq 0,630$.

9 Une somme de série par Cauchy-Schwarz



$$\|b\|_2^2 = \sum_{n \geq 1} 4^{-n} = \frac{1/4}{1 - 1/4} = \frac{1}{3}, \text{ donc } \|b\|_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Alors } \|a\|_2 \|b\|_2 = \frac{\pi}{\sqrt{6}\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0,740, \text{ tandis que } \sum a_n b_n = \ln 2 \approx 0,693.$$

Comme $0,693 \leq 0,740$, l'inégalité est vérifiée (et stricte car a et b ne sont pas proportionnelles).

10 Norme d'une forme linéaire sur L^2



On a $\varphi(f) = \langle f, a \rangle$ avec $a(t) = 1 - t \in L^2$. Par Cauchy-Schwarz, $|\varphi(f)| \leq \|a\|_2 \|f\|_2$: φ est continue et, d'après Riesz, $\|\varphi\| = \|a\|_2$.

$$\|a\|_2^2 = \int_0^1 (1-t)^2 dt = \frac{1}{3}, \text{ donc } \|\varphi\| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Prenons $f = \frac{a}{\|a\|_2} = \sqrt{3}(1-t)$: $\|f\|_2 = 1$ et $\varphi(f) = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. La borne est atteinte.

11 Meilleure approximation par une constante



Les constantes forment $F = \text{Vect}(1)$, avec $\|1\| = 1$. Donc

$$p_F(f) = \langle f, 1 \rangle \cdot 1 = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} \text{ (la moyenne de } f).$$

$$\text{Par Pythagore, } d(f, F)^2 = \|f\|^2 - \|p_F(f)\|^2 = \int_0^1 t^4 dt - \frac{1}{9} = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}.$$

Donc la distance vaut $\frac{2}{3\sqrt{5}} \approx 0,298$.

12 Orthonormalisation de Gram-Schmidt



$$\|1\|^2 = 2, \text{ donc } e_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\langle t, 1 \rangle = 0 \text{ et } \|t\|^2 = \frac{2}{3}, \text{ donc } e_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} t.$$

Pour t^2 : $\langle t^2, e_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3}$, d'où la composante $\langle t^2, e_0 \rangle e_0 = \frac{1}{3}$; $\langle t^2, t \rangle = 0$. On pose

$$v = t^2 - \frac{1}{3}. \text{ Alors } \|v\|^2 = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}.$$

Donc $e_2 = \sqrt{\frac{45}{8}} \left(t^2 - \frac{1}{3} \right)$. On reconnaît les premiers polynômes de Legendre normalisés.

13 La boule unité de ℓ^2 n'est pas compacte



Pour $n \neq m$, $\|e_n - e_m\|_2^2 = 1 + 1 = 2$, donc $\|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{2}$.

Les e_n appartiennent à la boule unité fermée, mais deux termes distincts sont toujours à distance $\sqrt{2}$: aucune sous-suite n'est de Cauchy, donc aucune ne converge. La boule n'est pas compacte pour la topologie de la norme (contrairement à ce qui se passe en dimension finie).

14 Inclusion des espaces de suites



Par homogénéité, on suppose $\|x\|_p = 1$. Alors $|x_n| \leq 1$ pour tout n , donc $|x_n|^q \leq |x_n|^p$ et $\sum |x_n|^q \leq \sum |x_n|^p = 1$, c'est-à-dire $\|x\|_q \leq 1 = \|x\|_p$.

Pour $x = (3, 4)$: $\|x\|_1 = 7$, $\|x\|_2 = 5$, $\|x\|_4 = 337^{1/4} \approx 4,285$. On a bien $7 \geq 5 \geq 4,285$.

15 Coefficients de t dans la base des sinus



Une intégration par parties donne

$\int_0^1 t \sin(n\pi t) dt = \left[-\frac{t \cos(n\pi t)}{n\pi} \right]_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \cos(n\pi t) dt = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$, car la dernière intégrale est nulle.

Donc $c_n = \langle f, e_n \rangle = \frac{\sqrt{2}(-1)^{n+1}}{n\pi}$ et $c_n^2 = \frac{2}{n^2\pi^2}$.

Parseval : $\sum c_n^2 = \|f\|^2 = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$, soit $\frac{2}{\pi^2} \sum \frac{1}{n^2} = \frac{1}{3}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

16 Une forme linéaire non continue

★★★

$$\varphi(f_\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 \frac{dt}{t} = \ln \frac{1}{\varepsilon} \text{ et } \|f_\varepsilon\|_2^2 = \int_\varepsilon^1 \frac{dt}{t} = \ln \frac{1}{\varepsilon}, \text{ donc } \|f_\varepsilon\|_2 = \sqrt{\ln(1/\varepsilon)}.$$

Le rapport $\frac{|\varphi(f_\varepsilon)|}{\|f_\varepsilon\|_2} = \sqrt{\ln(1/\varepsilon)}$ tend vers $+\infty$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$: aucune constante C ne vérifie $|\varphi(f)| \leq C\|f\|_2$, donc φ n'est pas continue sur L^2 .

C'est cohérent avec Riesz : la fonction $a(t) = t^{-1/2}$ n'est pas dans L^2 ($\int_0^1 dt/t = +\infty$), donc φ ne peut pas s'écrire $\langle \cdot, a \rangle$ avec $a \in L^2$.

17 Cas d'égalité dans Hölder sur $\mathbb{R}^3$

★★★

$\sum a_i^{3/2} = 1 + 8 + 27 = 36$, donc $\|a\|_{3/2} = 36^{2/3} \approx 10,90$. Par Hölder, $\varphi(x) \leq \|a\|_{3/2}\|x\|_3$, et c'est la norme de φ .

Le cas d'égalité exige $|x_i|^3$ proportionnel à $a_i^{3/2}$, donc x_i proportionnel à $a_i^{1/2} = (1, 2, 3)$.

On pose $x = \frac{(1, 2, 3)}{36^{1/3}}$: alors $\|x\|_3^3 = \frac{1 + 8 + 27}{36} = 1$.

Enfin $\varphi(x) = \frac{1 + 8 + 27}{36^{1/3}} = 36^{2/3} = \|a\|_{3/2}$. La borne est atteinte.

18 Un hyperplan fermé et son orthogonal

★★★

$F = \ker \varphi$ avec $\varphi(f) = \langle f, 1 \rangle$ continue (Cauchy-Schwarz) : F est fermé. D'après Riesz, $F^\perp = \text{Vect}(1)$, l'ensemble des constantes.

La projection sur $F^\perp$ est la moyenne $\int_0^1 f$; donc $p_F(f) = f - \int_0^1 f$. Pour $f = t^2$:

$$p_F(f) = t^2 - \frac{1}{3}.$$

La distance est $\|f - p_F(f)\| = \left\| \frac{1}{3} \right\| = \frac{1}{3}$.

19 Reste de la décomposition de 1

★★★★

Les coefficients valent $c_1^2 = \frac{8}{\pi^2}$ et $c_3^2 = \frac{8}{9\pi^2}$. Comme (e_1, e_3) est orthonormée,
 $\|S\|^2 = c_1^2 + c_3^2 = \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{10}{9} = \frac{80}{9\pi^2}$.

Par Pythagore, $\|f - S\|^2 = 1 - \frac{80}{9\pi^2} \approx 1 - 0,9006 = 0,0994$.

Ce nombre est aussi la somme $\sum_{n \geq 5, n \text{ impair}} c_n^2$: deux termes suffisent déjà à capter plus de 90 % de l'énergie de f .

20 Une inégalité de Cauchy-Schwarz entre L^4 et L^2

★★★★

Par Cauchy-Schwarz appliqué à f^2 et g^2 : $\int |fg|^2 \leq \left(\int f^4 \right)^{1/2} \left(\int g^4 \right)^{1/2}$. En prenant la racine carrée, $\|fg\|_2 \leq \|f\|_4 \|g\|_4$.

Pour $f = x, g = 1 - x$: $\int_0^1 x^2(1-x)^2 dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$, donc

$$\|fg\|_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} \approx 0,183.$$

D'autre part $\int_0^1 x^4 = \int_0^1 (1-x)^4 = \frac{1}{5}$, donc $\|f\|_4 \|g\|_4 = \left(\frac{1}{5}\right)^{1/2} \approx 0,447$. L'inégalité $0,183 \leq 0,447$ est vérifiée.

21 $C([0, 1])$ n'est pas complet pour la norme L^2

★★★★

$f_n - g$ est nulle hors de $[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}]$, où elle vaut $n(t - \frac{1}{2}) + 1$. Avec

$$u = n(t - \frac{1}{2}) + 1 \in [0, 1], dt = du/n \text{ et } \|f_n - g\|_2^2 = \frac{1}{n} \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3n}.$$

Ainsi $f_n \rightarrow g$ dans L^2 ; par inégalité triangulaire, $\|f_n - f_m\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{3n}} + \frac{1}{\sqrt{3m}} \rightarrow 0$: la suite est de Cauchy.

Si elle convergeait vers une fonction continue h , on aurait $h = g$ presque partout, ce qui est impossible car g présente un saut en $\frac{1}{2}$. Donc $C([0, 1])$ n'est pas complet pour $\|\cdot\|_2$: c'est pourquoi on construit L^2 en complétant.

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Espaces L_p et espaces de Hilbert :
exercices de maths Licence L3

QCM de maths

Espaces L_p et espaces de Hilbert : QCM
de maths Licence L3

Contrôles de maths

Espaces L_p et espaces de Hilbert :
contrôle de maths Licence L3

Exercices de maths

Séries de Fourier : exercices de maths
Licence L3

 Exercices de maths

Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$: exercices de maths Licence L3

 QCM de maths

Séries de Fourier : QCM de maths Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage