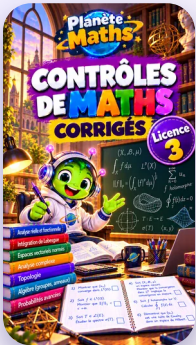


Espaces L_p et espaces de Hilbert : corrigé du contrôle de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre de contrôles corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 52 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigé du contrôle avec le barème détaillé. Compte tes points et repère ce qu'il faut revoir.

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice autorisée seulement quand l'énoncé le précise.

1

Normes et inégalités dans $\mathbb{R}^3$

/ 4 pts

- (a) $\|x\|_1 = 5$, $\|x\|_2 = \sqrt{1+4+4} = 3$, $\|x\|_\infty = 2$, $\|y\|_2 = \sqrt{9+16} = 5$. (1 pt)
- (b) $\langle x, y \rangle = 3 + 0 - 8 = -5$ et $|-5| \leq 3 \times 5 = 15$. (1 pt)
- (c) $x + y = (4, -2, -2)$, $\|x + y\|_2 = \sqrt{24} \approx 4,90 \leq 3 + 5 = 8$. (1 pt)
- (d) $\|x\|_1 \|y\|_\infty = 5 \times 4 = 20 \geq |\langle x, y \rangle| = 5$. (1 pt)

2 Intégrabilité d'une puissance

/ 3 pts

- (a) $\int_0^1 x^{-2p/5} dx$ converge si et seulement si $\frac{2p}{5} < 1$, soit $p < \frac{5}{2}$. (1 pt)
- (b) $\|f\|_1 = \int_0^1 x^{-2/5} dx = \frac{5}{3}$. $\|f\|_2^2 = \int_0^1 x^{-4/5} dx = 5$, donc $\|f\|_2 = \sqrt{5}$. (1 pt)
- (c) $3 > \frac{5}{2}$, donc $\int_0^1 x^{-6/5} dx$ diverge : $f \notin L^3$. (1 pt)

3 Projection orthogonale dans L^2

/ 4 pts

- (a) $\langle f, g \rangle = \int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{4}$ et $\|g\|^2 = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$. (1,5 pt)
- (b) $p_F(f) = \frac{\langle f, g \rangle}{\|g\|^2} g = \frac{3}{4} t$. (1 pt)
- (c) $\|f\|^2 = \frac{1}{5}$ et $\|p_F(f)\|^2 = \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{16}$. Donc $d(f, F)^2 = \frac{1}{5} - \frac{3}{16} = \frac{1}{80}$. (1,5 pt)

4 Base hilbertienne et Parseval

/ 4 pts

- (a) $\|e_1\|^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 t dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1$. (1 pt)
- (b) $\int_0^\pi t \sin(nt) dt = \left[-\frac{t \cos(nt)}{n} \right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos(nt) dt = \frac{\pi(-1)^{n+1}}{n}$. On multiplie par $\sqrt{2/\pi}$: $\langle f, e_n \rangle = \sqrt{2\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. (1,5 pt)
- (c) Parseval : $\sum \frac{2\pi}{n^2} = \|f\|^2 = \int_0^\pi t^2 dt = \frac{\pi^3}{3}$, donc $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. (1,5 pt)

5 Théorème de Riesz

/ 3 pts

- (a) $a(t) = 1 + t$. (1 pt)
- (b) $\|\varphi\|^2 = \|a\|^2 = \int_0^1 (1+t)^2 dt = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}$, donc $\|\varphi\| = \sqrt{7/3} \approx 1,528$. (1 pt)
- (c) $f = \frac{a}{\|a\|} = \sqrt{\frac{3}{7}}(1+t)$ convient. Pour $f = 1$:
 $\varphi(1) = \int_0^1 (1+t) dt = \frac{3}{2} = 1,5 \leq 1,528$. (1 pt)

6

Vrai ou faux

/ 2 pts

(a) Faux : avec $x = (1, 0)$, $y = (0, 1)$, $\|x + y\|_1^2 + \|x - y\|_1^2 = 8 \neq 4 = 2\|x\|_1^2 + 2\|y\|_1^2$.
L'identité du parallélogramme n'est pas vérifiée, donc la norme ne vient pas d'un produit scalaire. **(1 pt)**

(b) Vrai : c'est l'inégalité de Bessel, valable pour toute famille orthonormée (l'égalité de Parseval demande une base hilbertienne). **(1 pt)**

Le livre de contrôles corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 52 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)**Zyro te conseille la suite****Contrôles de maths**

Espaces L_p et espaces de Hilbert :
contrôle de maths Licence L3

**Cours de maths**

Espaces L_p et espaces de Hilbert : cours
de maths Licence L3

 QCM de maths

Espaces L_p et espaces de Hilbert : QCM de maths Licence L3

 Contrôles de maths

Séries de Fourier : contrôle de maths Licence L3

 Contrôles de maths

Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$: contrôle de maths Licence L3

 Cours de maths

Séries de Fourier : cours de maths Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage