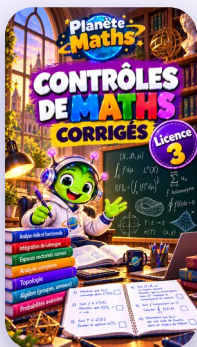


Espaces L_p et espaces de Hilbert : contrôle de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre de contrôles corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 52 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice autorisée seulement quand l'énoncé le précise.

1

Normes et inégalités dans $\mathbb{R}^3$

/ 4 pts

Soit $x = (1, -2, 2)$ et $y = (3, 0, -4)$ dans $\mathbb{R}^3$.

- Calculer $\|x\|_1$, $\|x\|_2$, $\|x\|_\infty$ et $\|y\|_2$.
- Calculer $\langle x, y \rangle$ et vérifier l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Calculer $\|x + y\|_2$ et vérifier l'inégalité de Minkowski.
- Vérifier l'inégalité de Hölder avec $p = 1$ et $q = \infty$.

2 Intégrabilité d'une puissance

/ 3 pts

Soit $f(x) = x^{-2/5}$ sur $]0, 1]$.

- Pour quelles valeurs de $p \geq 1$ a-t-on $f \in L^p(]0, 1])$?
- Calculer $\|f\|_1$ et $\|f\|_2$.
- La fonction f est-elle dans $L^3(]0, 1])$? Justifier.

3 Projection orthogonale dans L^2

/ 4 pts

Dans $L^2(]0, 1])$, soit $f(t) = t^2$ et $F = \text{Vect}(g)$ avec $g(t) = t$.

- Calculer $\langle f, g \rangle$ et $\|g\|^2$.
- Déterminer la projection orthogonale $p_F(f)$.
- Calculer $d(f, F)^2$ à l'aide du théorème de Pythagore.

4 Base hilbertienne et Parseval

/ 4 pts

Dans $L^2(]0, \pi])$, on admet que $e_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nt)$ ($n \geq 1$) est une base hilbertienne. Soit $f(t) = t$.

- Vérifier que $\|e_1\| = 1$.
- Montrer que $\langle f, e_n \rangle = \sqrt{2\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (on pourra intégrer par parties).
- En déduire $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

5 Théorème de Riesz

/ 3 pts

Sur $L^2([0, 1])$, soit $\varphi(f) = \int_0^1 (1+t)f(t) dt$.

- Donner $a \in L^2$ tel que $\varphi = \langle \cdot, a \rangle$.
- Calculer $\|\varphi\|$.
- Donner une fonction f de norme 1 telle que $\varphi(f) = \|\varphi\|$, et vérifier avec $f = 1$ que $|\varphi(1)| \leq \|\varphi\|$.

6 Vrai ou faux

/ 2 pts

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse et justifier.

- L'espace $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ est un espace de Hilbert.
- Si (e_n) est une famille orthonormée de H , alors $\sum |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ pour tout x .

Le livre de contrôles corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 52 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

 Zyro te conseille la suite

 Corrigés de contrôles de maths

Espaces L_p et espaces de Hilbert :
corrigé du contrôle de maths Licence L3

 Cours de maths

Espaces L_p et espaces de Hilbert : cours
de maths Licence L3

 Exercices de maths

Espaces L_p et espaces de Hilbert :
exercices de maths Licence L3

 Corrigés de contrôles de maths

Séries de Fourier : corrigé du contrôle de
maths Licence L3

 Corrigés de contrôles de maths

Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$: corrigé du
contrôle de maths Licence L3

 Cours de maths

Séries de Fourier : cours de maths
Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage