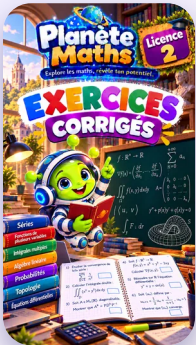


Espaces préhilbertiens et euclidiens : exercices de maths Licence L2 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 128 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

21 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

1 Produit scalaire et norme dans $\mathbb{R}^3$

★ ★ ★

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, calculer $\langle u, v \rangle$, $\|u\|$ et $\|v\|$ pour $u = (2, -1, 3)$ et $v = (4, 5, -2)$.

2 Produit scalaire ou non ?

★ ★ ★

Pour $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ dans $\mathbb{R}^2$, dire si les applications suivantes sont des produits scalaires : (a) $x_1 y_1 - x_2 y_2$; (b) $2x_1 y_1 + 3x_2 y_2$; (c) $x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_1 y_2$.

3 Vecteurs orthogonaux



On donne $u = (1, 2, -1)$, $v = (3, -1, 1)$ et $w = (2, 1, 4)$ dans $\mathbb{R}^3$. Quels couples sont orthogonaux ?

4 Un angle



Calculer l'angle entre $u = (1, 1, 0)$ et $v = (0, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

5 Pythagore



Dans un espace euclidien, u et v sont orthogonaux avec $\|u\| = 3$ et $\|v\| = 4$. Calculer $\|u + v\|$ et $\|u - v\|$.

6 Matrices orthogonales 2x2



Parmi $A = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, lesquelles sont orthogonales ? Préciser rotation ou réflexion.

7 Un premier cas du théorème spectral



Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée.

8 Cauchy-Schwarz pour trois réels



(a) Montrer que pour tous réels a, b, c , $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$. (b) Si $a + b + c = 6$, minorer $a^2 + b^2 + c^2$ et préciser le cas d'égalité.

9 Produit scalaire intégral



Sur $\mathbb{R}_2[X]$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$. (a) Calculer $\langle 1, X \rangle$ et $\|X\|$. (b) Orthonormaliser $(1, X)$.

10 Un plan de $\mathbb{R}^3$



Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. (a) Donner $F^\perp$ et une base orthogonale de F . (b) Calculer les projections orthogonales de $x = (3, 0, 0)$ sur $F^\perp$ puis sur F . (c) En déduire l'image de x par la symétrie orthogonale par rapport à F .

11 Distance d'un point à une droite



Dans $\mathbb{R}^3$, calculer la distance du point $x = (1, 2, -1)$ à la droite $D = \text{Vect}(u)$ avec $u = (2, 1, 2)$.

12 Gram-Schmidt dans le plan



Orthonormaliser la base $v_1 = (3, 4)$, $v_2 = (1, 0)$ de $\mathbb{R}^2$.

13 Une matrice orthogonale conserve la norme



Soit Q une matrice orthogonale de taille n . Montrer que $\|Qx\| = \|x\|$ pour tout x , puis que $\det Q = \pm 1$ et que toute valeur propre réelle de Q vaut ± 1 .

14 Symétrie orthogonale du plan



Dans $\mathbb{R}^2$, écrire la matrice de la projection orthogonale sur $D = \text{Vect}(1, 2)$, puis celle de la symétrie orthogonale par rapport à D . Vérifier que cette dernière est orthogonale de déterminant -1 .

15 Produit scalaire sur les matrices

★★★

Sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$. (a) Calculer $\langle A, B \rangle$ et $\|A\|^2$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. (b) Montrer que toute matrice symétrique est orthogonale à toute matrice antisymétrique.

16 Théorème spectral et puissances

★★★★

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A dans une base orthonormée puis calculer A^5 .

17 Une matrice de la forme $I + J$

★★★★

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. (a) Déterminer ses valeurs propres et une base orthonormée de vecteurs propres. (b) En déduire A^{-1} .

18 Réduire une forme quadratique

★★★★

Soit $q(x, y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2$. Écrire q comme somme pondérée de carrés dans une base orthonormée et décrire la courbe $q(x, y) = 3$.

19 Un projecteur non orthogonal

★★★★

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. (a) Montrer que M est une matrice de projecteur. (b) Est-ce une projection orthogonale ? (c) Donner la projection orthogonale sur $\text{Im } M$.

20 Polynômes orthogonaux de Legendre

★★★★

Sur $\mathbb{R}_3[X]$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$. (a) Appliquer Gram-Schmidt à $(1, X, X^2)$.
(b) Déterminer la projection orthogonale de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ et la distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$.

21 Orthogonalité des sous-espaces propres

★★★★

Soit A une matrice symétrique réelle. (a) Montrer que deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux. (b) Vérifier sur $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 128 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de Licence L2

Changer de niveau

Niveau : Licence L2

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi



Zyro te conseille la suite

✓ Exercices corrigés de maths

Espaces préhilbertiens et euclidiens :
exercices corrigés de maths Licence L2

■ Cours de maths

Espaces préhilbertiens et euclidiens :
cours de maths Licence L2

🎯 QCM de maths

Espaces préhilbertiens et euclidiens :
QCM de maths Licence L2

✓ Exercices corrigés de maths

Suites et séries de fonctions : exercices
corrigés de maths Licence L2

✓ Exercices corrigés de maths

Séries numériques : exercices corrigés de
maths Licence L2

■ Cours de maths

Suites et séries de fonctions : cours de
maths Licence L2

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage