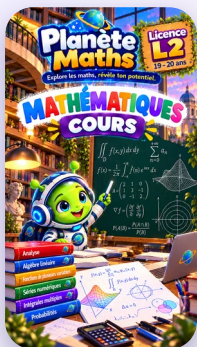


Espaces préhilbertiens et euclidiens : cours de maths Licence L2 à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 100 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Dans le plan, la longueur d'un vecteur, l'angle entre deux directions et la perpendicularité se mesurent grâce au produit scalaire. Ce chapitre transporte ces idées dans des espaces de dimension quelconque, y compris des espaces de fonctions ou de matrices : on y construit des bases orthonormées, on y projette, et on y diagonalise les matrices symétriques dans une base où tout est orthogonal.

1. Produit scalaire

D Produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Un **produit scalaire** sur E est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ qui est :

- **bilinéaire** (linéaire en chaque variable) ;
- **symétrique** : $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
- **définie positive** : $\langle x, x \rangle \geq 0$, et $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

Un espace muni d'un produit scalaire est dit **préhilbertien réel** ; s'il est de dimension finie, il est dit **euclidien**. On pose $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Espace	Produit scalaire	Norme associée
$\mathbb{R}^n$	$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$	$\ x\ = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$
$\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$	$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$	$\ f\ = \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 dt}$
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top B)$	$\ A\ = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$

E Exemple 1 : un produit scalaire inattendu

Sur $\mathbb{R}_2[X]$, on pose $\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$. La symétrie et la bilinéarité sont immédiates, et $\varphi(P, P) = P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 \geq 0$. Si $\varphi(P, P) = 0$, alors $P(0) = P(1) = P(2) = 0$: un polynôme de degré au plus 2 ayant trois racines est nul. Donc φ est un produit scalaire.

2. Norme et inégalité de Cauchy-Schwarz

P

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tous x, y d'un espace préhilbertien réel :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Idée de la preuve. Si $y \neq 0$, la fonction $t \mapsto \|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t\langle x, y \rangle + t^2\|y\|^2$ est positive sur $\mathbb{R}$: son discriminant est négatif ou nul, ce qui donne $\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$. Le discriminant est nul exactement quand le trinôme a une racine, c'est-à-dire quand $x + ty = 0$.

On en déduit l'**inégalité triangulaire** $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ et, pour x, y non nuls, la définition de l'angle $\theta \in [0, \pi]$ par $\cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$. N'oubliez pas l'identité de polarisation $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$.

E

Exemple 2 : une minimisation sans dérivée

On cherche le minimum de $S = x^2 + y^2 + z^2$ sous la contrainte $x + 2y + 2z = 9$.

Avec $u = (1, 2, 2)$ et $w = (x, y, z)$, Cauchy-Schwarz donne

$81 = \langle u, w \rangle^2 \leq \|u\|^2 \|w\|^2 = 9S$, donc $S \geq 9$. L'égalité exige $w = \lambda u$ avec $9\lambda = 9$: le minimum 9 est atteint en $(1, 2, 2)$.

3. Orthogonalité

D Orthogonalité

Deux vecteurs sont **orthogonaux** si $\langle x, y \rangle = 0$. L'**orthogonal** d'une partie A est $A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, \langle x, a \rangle = 0\}$, un sous-espace vectoriel. Une famille est **orthogonale** si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux, **orthonormée** si de plus ils sont tous de norme 1.

P Propriétés

- Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est **libre**.
- **Pythagore** : $x \perp y \Rightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
- Si F est un sous-espace de dimension finie, $E = F \oplus F^\perp$; en dimension finie, $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$.
- Dans une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n) : x = \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i$ et $\|x\|^2 = \sum_i \langle x, e_i \rangle^2$.

Pour la première propriété : si $\sum \lambda_i u_i = 0$, le produit scalaire avec u_j donne $\lambda_j \|u_j\|^2 = 0$, donc $\lambda_j = 0$.

4. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

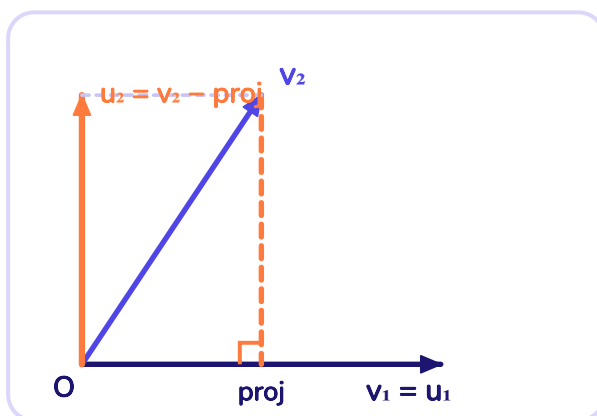
M

Gram-Schmidt

Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille libre. On pose

$$u_1 = v_1, \quad u_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} u_j, \quad e_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}.$$

La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée et $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ pour tout k .



Chaque étape retire à v_k sa composante le long des vecteurs déjà construits : ce qui reste est orthogonal à tous. En particulier, **tout espace euclidien possède une base orthonormée.**

E Exemple 3

Dans $\mathbb{R}^3$, orthonormalisons $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (0, 1, 1)$.

$u_1 = (1, 1, 0)$, $\|u_1\|^2 = 2$. Puis $\langle v_2, u_1 \rangle = 1$, donc $u_2 = v_2 - \frac{1}{2}u_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$, $\|u_2\|^2 = \frac{3}{2}$.

Enfin $\langle v_3, u_1 \rangle = 1$ et $\langle v_3, u_2 \rangle = \frac{1}{2}$, donc $u_3 = v_3 - \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{3}u_2 = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

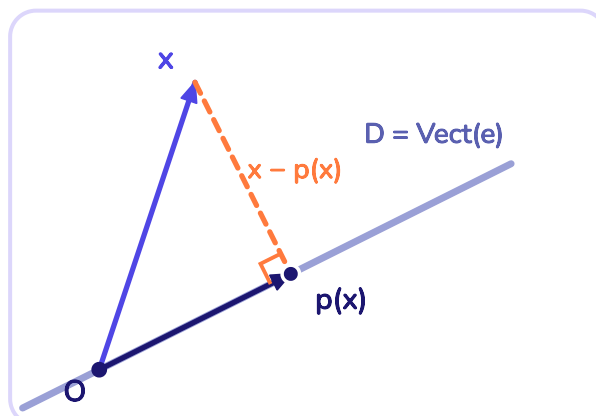
La base orthonormée obtenue est $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)$.

5. Projection orthogonale

D Projection orthogonale

Soit F un sous-espace de dimension finie de E . La **projection orthogonale** p_F sur F associe à x l'unique vecteur $p_F(x) \in F$ tel que $x - p_F(x) \in F^\perp$. Si $(e_1, \dots, e_r)$ est une base orthonormée de F ,

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^r \langle x, e_i \rangle e_i.$$



P**Meilleure approximation**

$p_F(x)$ est le point de F le plus proche de x : pour tout $y \in F$,
 $\|x - y\| \geq \|x - p_F(x)\|$. On note $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$, et
 $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + d(x, F)^2$.

E**Exemple 4**

Dans $\mathbb{R}^3$, soit $F = \text{Vect}(a, b)$ avec $a = (1, 1, 0)$, $b = (1, -1, 2)$ (orthogonaux) et
 $x = (1, 2, 3)$. Alors $\langle x, a \rangle = 3$, $\|a\|^2 = 2$, $\langle x, b \rangle = 5$, $\|b\|^2 = 6$, donc

$$p_F(x) = \frac{3}{2}a + \frac{5}{6}b = \left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right).$$

Le vecteur $x - p_F(x) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ dirige $F^\perp$, et $d(x, F) = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

⚠**Erreur classique**

La formule $\sum \langle x, e_i \rangle e_i$ n'est valable que pour une base **orthonormée**. Avec une base seulement orthogonale, il faut diviser chaque terme par $\|a_i\|^2$, comme dans l'exemple ci-dessus.

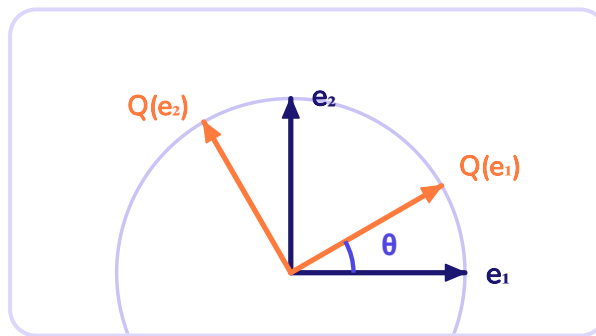
6. Endomorphismes orthogonaux

D Endomorphisme orthogonal

Un endomorphisme u de l'espace euclidien E est **orthogonal** s'il conserve le produit scalaire : $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$. Il est équivalent de demander qu'il conserve la norme, ou qu'il envoie une (toute) base orthonormée sur une base orthonormée.

P Matrices orthogonales

Dans une base orthonormée, u est orthogonal si et seulement si sa matrice Q vérifie $Q^T Q = I_n$, c'est-à-dire que ses colonnes forment une base orthonormée. Alors $Q^{-1} = Q^T$, $\det Q = \pm 1$, et les valeurs propres réelles de Q valent 1 ou -1 . L'ensemble $O(n)$ est un groupe pour le produit.



En dimension **2**, les matrices orthogonales sont de deux types : les **rotations** $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ de déterminant **1**, et les **réflexions** $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ de déterminant -1 .

E**Exemple 5**

La matrice $Q = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ a des colonnes de norme $\sqrt{9+16}/5 = 1$, orthogonales entre elles ($-12 + 12 = 0$) et un déterminant égal à $\frac{9+16}{25} = 1$: c'est la rotation d'angle θ avec $\cos \theta = \frac{3}{5}$ et $\sin \theta = \frac{4}{5}$.

7. Matrices symétriques et théorème spectral

P**Théorème spectral**

Toute matrice symétrique réelle $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable **dans une base orthonormée** : il existe $Q \in O(n)$ et une matrice diagonale réelle D telles que

$$A = Q D Q^T.$$

Deux faits se démontrent vite. D'abord, **les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux** : si $Ax = \lambda x$ et $Ay = \mu y$, alors

$\lambda \langle x, y \rangle = \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle = \mu \langle x, y \rangle$, donc $\langle x, y \rangle = 0$ dès que $\lambda \neq \mu$. Ensuite, toutes les valeurs propres sont réelles ; le reste s'obtient par récurrence sur la dimension.

M**Diagonaliser orthogonalement**

1. Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres.
2. Pour chaque valeur propre, déterminer une base du sous-espace propre.
3. Orthonormaliser chaque base (Gram-Schmidt si la dimension dépasse 1).
4. Rassembler ces vecteurs en colonnes : on obtient Q , et D porte les valeurs propres dans le même ordre.

E

Exemple 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est

$(2 - \lambda)((3 - \lambda)^2 - 1) = (2 - \lambda)^2(4 - \lambda)$. Le sous-espace propre de **2** est $\text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, -1))$, celui de **4** est $\text{Vect}((0, 1, 1))$. Ces vecteurs sont déjà orthogonaux ; il suffit de normaliser :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad D = \text{diag}(2, 2, 4).$$

!

Formes quadratiques

Avec $A = QDQ^T$, la forme $q(x) = x^T Ax$ devient $\sum_i \lambda_i X_i^2$ dans les coordonnées $X = Q^T x$. Les valeurs propres de **A** donnent donc directement la nature de la conique ou de la quadrique **q = constante** : elles sont toutes strictement positives si et seulement si **q** est définie positive.

À retenir

- Un **produit scalaire** est une forme bilinéaire symétrique définie positive ; la norme associée est $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.
- **Cauchy-Schwarz** : $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, égalité exactement pour des vecteurs colinéaires.
- Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre ; en base orthonormée, $x = \sum \langle x, e_i \rangle e_i$.
- **Gram-Schmidt** transforme toute famille libre en famille orthonormée engendrant les mêmes sous-espaces successifs.
- La **projection orthogonale** sur F donne le point de F le plus proche : $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$.
- Q est **orthogonale** si $Q^T Q = I$; alors $\det Q = \pm 1$ et la norme est conservée.
- **Théorème spectral** : toute matrice symétrique réelle s'écrit QDQ^T avec Q orthogonale et D diagonale réelle.

Le livre de cours de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 100 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de Licence L2

Changer de niveau

Niveau : Licence L2

6 questions au hasard, correction tout de suite.

 Lancer le défi

  **Zyro te conseille la suite**

 **Exercices de maths**

Espaces préhilbertiens et euclidiens :
exercices de maths Licence L2

 **Contrôles de maths**

Espaces préhilbertiens et euclidiens :
contrôle de maths Licence L2

 **QCM de maths**

Espaces préhilbertiens et euclidiens :
QCM de maths Licence L2

 **Exercices de maths**

Suites et séries de fonctions : exercices
de maths Licence L2

 Exercices de maths

Séries numériques : exercices de maths
Licence L2

 Contrôles de maths

Suites et séries de fonctions : contrôle de
maths Licence L2

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage