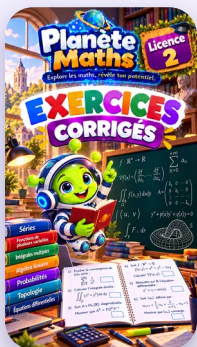


Espaces préhilbertiens et euclidiens : exercices corrigés de maths Licence L2 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 128 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Produit scalaire et norme dans $\mathbb{R}^3$



$$\langle u, v \rangle = 2 \times 4 + (-1) \times 5 + 3 \times (-2) = 8 - 5 - 6 = -3.$$

$$\|u\|^2 = 4 + 1 + 9 = 14, \text{ donc } \|u\| = \sqrt{14}. \quad \|v\|^2 = 16 + 25 + 4 = 45, \text{ donc } \|v\| = 3\sqrt{5}.$$

2 Produit scalaire ou non ?



(a) Non : avec $x = (0, 1)$, la valeur en (x, x) est $-1 < 0$, la forme n'est pas positive.

(b) Oui : elle est bilinéaire et symétrique, et $\varphi(x, x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 \geq 0$ avec égalité seulement pour $x = 0$.

(c) Non : elle n'est pas symétrique, car pour $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ on trouve $\varphi(e_1, e_2) = 1$ mais $\varphi(e_2, e_1) = 0$.

3 Vecteurs orthogonaux



$\langle u, v \rangle = 3 - 2 - 1 = 0$: orthogonaux. $\langle u, w \rangle = 2 + 2 - 4 = 0$: orthogonaux.

$\langle v, w \rangle = 6 - 1 + 4 = 9 \neq 0$: non orthogonaux.

4 Un angle



$\langle u, v \rangle = 1$ et $\|u\| = \|v\| = \sqrt{2}$, donc $\cos \theta = \frac{1}{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$.

5 Pythagore



Comme $\langle u, v \rangle = 0$, $\|u + v\|^2 = 9 + 16 = 25$ et $\|u - v\|^2 = 9 - 0 + 16 = 25$. Donc $\|u + v\| = \|u - v\| = 5$.

6 Matrices orthogonales 2x2



A : colonnes $\frac{1}{13}(5, 12)$ et $\frac{1}{13}(-12, 5)$, de norme $\frac{\sqrt{169}}{13} = 1$ et de produit scalaire $\frac{-60+60}{169} = 0$; $\det A = \frac{25+144}{169} = 1$: c'est une rotation.

B : mêmes vérifications, $\det B = \frac{-25-144}{169} = -1$: c'est une réflexion.

C : la première colonne a pour norme au carré $2 \neq 1$: C n'est pas orthogonale (en revanche $\frac{1}{\sqrt{2}}C$ l'est).

7 Un premier cas du théorème spectral



$A(1, 1) = (2, 2) = 2(1, 1)$ et $A(1, -1) = (-2, 2) = -2(1, -1)$. Ces deux vecteurs sont orthogonaux ; en les normalisant, on obtient $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \text{diag}(2, -2)$, avec $A = QDQ^T$.

8 Cauchy-Schwarz pour trois réels



(a) Dans $\mathbb{R}^3$, avec $u = (1, 1, 1)$ et $w = (a, b, c)$, Cauchy-Schwarz donne $\langle u, w \rangle^2 \leq \|u\|^2 \|w\|^2$, soit $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

(b) $36 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$, donc $a^2 + b^2 + c^2 \geq 12$. L'égalité a lieu si w est colinéaire à u , donc $a = b = c = 2$.

9 Produit scalaire intégral



(a) $\langle 1, X \rangle = \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2}$ et $\|X\|^2 = \int_0^1 t^2 \, dt = \frac{1}{3}$, donc $\|X\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

(b) $u_1 = 1$ de norme 1. Puis $u_2 = X - \langle X, 1 \rangle \cdot 1 = X - \frac{1}{2}$, avec $\|u_2\|^2 = \int_0^1 (t - \frac{1}{2})^2 \, dt = \frac{1}{12}$. La base orthonormée est $(1, \sqrt{3}(2X - 1))$.

10 Un plan de $\mathbb{R}^3$



(a) $F^\perp = \text{Vect}(1, 1, 1)$. Les vecteurs $(1, -1, 0)$ et $(1, 1, -2)$ sont dans F et orthogonaux ($1 - 1 + 0 = 0$) : ils forment une base orthogonale de F .

(b) $p_{F^\perp}(x) = \frac{\langle x, (1, 1, 1) \rangle}{3} (1, 1, 1) = (1, 1, 1)$, et $p_F(x) = x - p_{F^\perp}(x) = (2, -1, -1)$.

(c) La symétrie vaut $s(x) = x - 2p_{F^\perp}(x) = (3, 0, 0) - 2(1, 1, 1) = (1, -2, -2)$, de norme $3 = \|x\|$, comme il se doit.

11 Distance d'un point à une droite



$\langle x, u \rangle = 2 + 2 - 2 = 2$ et $\|u\|^2 = 9$, donc $p_D(x) = \frac{2}{9}u = (\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9})$.

$d(x, D)^2 = \|x\|^2 - \|p_D(x)\|^2 = 6 - \frac{4}{9} = \frac{50}{9}$, donc $d(x, D) = \frac{5\sqrt{2}}{3}$.

12 Gram-Schmidt dans le plan



$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Puis $\langle v_2, e_1 \rangle = \frac{3}{5}$ et $u_2 = v_2 - \frac{3}{5}e_1 = \left(\frac{16}{25}, -\frac{12}{25}\right)$, de norme $\frac{\sqrt{256+144}}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$.

Donc $e_2 = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$, et $\langle e_1, e_2 \rangle = \frac{12}{25} - \frac{12}{25} = 0$.

13 Une matrice orthogonale conserve la norme



$$\|Qx\|^2 = (Qx)^\top (Qx) = x^\top Q^\top Qx = x^\top x = \|x\|^2.$$

De $Q^\top Q = I$, on tire $\det(Q)^2 = \det(Q^\top) \det(Q) = 1$, donc $\det Q = \pm 1$.

Si $Qx = \lambda x$ avec $x \neq 0$, alors $\|x\| = \|Qx\| = |\lambda| \|x\|$, donc $|\lambda| = 1$, c'est-à-dire $\lambda = \pm 1$.

14 Symétrie orthogonale du plan



Avec $u = (1, 2)$, $\|u\|^2 = 5$ et $p(x) = \frac{\langle x, u \rangle}{5}u$, la matrice de p est $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

La symétrie est $s = 2p - I = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Ses colonnes sont de norme $\frac{\sqrt{25}}{5} = 1$, orthogonales ($-12 + 12 = 0$), et $\det s = \frac{-9-16}{25} = -1$: c'est une réflexion.

15 Produit scalaire sur les matrices



(a) $\text{tr}(A^\top B) = \sum a_{ij}b_{ij} = 1 \times 3 + 2 \times 0 + 0 \times 1 + (-1) \times 2 = 1$, et

$$\|A\|^2 = 1 + 4 + 0 + 1 = 6.$$

(b) Soit $S^\top = S$ et $K^\top = -K$. Alors

$\text{tr}(S^\top K) = \text{tr}(SK) = \text{tr}((SK)^\top) = \text{tr}(K^\top S) = -\text{tr}(KS) = -\text{tr}(SK)$, donc $\text{tr}(SK) = 0$.

16 Théorème spectral et puissances

★★★★

Trace 7, déterminant 6 : les valeurs propres sont 1 et 6. Pour 6 : $(A - 6I)x = 0$ donne $(2, 1)$. Pour 1 : $(A - I)x = 0$ donne $(1, -2)$. Ces vecteurs sont orthogonaux, de norme $\sqrt{5}$.

Ainsi $Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $D = \text{diag}(6, 1)$, $A = QDQ^T$.

Alors $A^5 = QD^5Q^T = 7776p_6 + 1 \cdot p_1$ avec $p_6 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $p_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$,
d'où

$$A^5 = \begin{pmatrix} 6221 & 3110 \\ 3110 & 1556 \end{pmatrix}.$$

17 Une matrice de la forme $I + J$

★★★★

(a) $A = I + J$ où J est la matrice de tous les 1. $A(1, 1, 1) = (4, 4, 4)$: valeur propre 4.
Pour x dans le plan $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $Jx = 0$, donc $Ax = x$: valeur propre 1, double.

Base orthonormée : $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ pour 4, puis $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ et $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$ pour 1
(orthogonaux entre eux et à $(1, 1, 1)$).

(b) Comme $J^2 = 3J$, on vérifie $(I + J)(I - \frac{1}{4}J) = I + J - \frac{1}{4}J - \frac{3}{4}J = I$. Donc

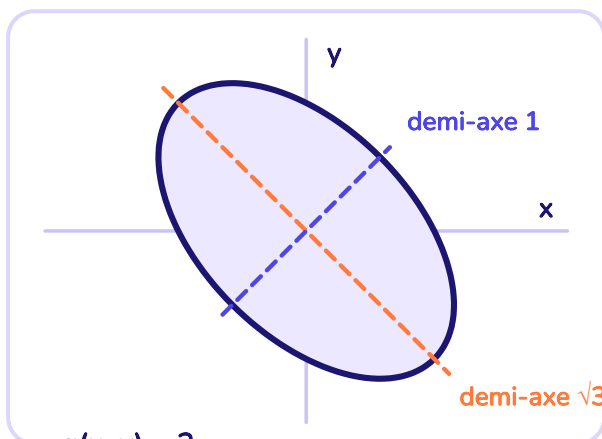
$$A^{-1} = I - \frac{1}{4}J = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

18 Réduire une forme quadratique

★★★

La matrice symétrique associée est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, de valeurs propres **1** (vecteur $(1, -1)$) et **3** (vecteur $(1, 1)$). Avec $X = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$ et $Y = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$, on obtient $q = X^2 + 3Y^2$: en effet $\frac{(x-y)^2 + 3(x+y)^2}{2} = 2x^2 + 2xy + 2y^2$.

La courbe $X^2 + 3Y^2 = 3$ est une ellipse de demi-axes $\sqrt{3}$ (selon $(1, -1)$) et **1** (selon $(1, 1)$).



19 Un projecteur non orthogonal

★★★

(a) $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M$: c'est un projecteur, d'image $\text{Vect}(1, 0)$ et de noyau $\text{Vect}(1, -1)$.

(b) $\langle (1, 0), (1, -1) \rangle = 1 \neq 0$: image et noyau ne sont pas orthogonaux, ce n'est pas une projection orthogonale (on remarque d'ailleurs que M n'est pas symétrique).

(c) La projection orthogonale sur $\text{Vect}(1, 0)$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

20 Polynômes orthogonaux de Legendre

★★★

(a) $u_0 = 1$, $\|u_0\|^2 = 2$. $\langle X, 1 \rangle = 0$ donc $u_1 = X$, $\|u_1\|^2 = \frac{2}{3}$. $\langle X^2, 1 \rangle = \frac{2}{3}$ et $\langle X^2, X \rangle = 0$ donc $u_2 = X^2 - \frac{1}{3}$, avec $\|u_2\|^2 = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$.

(b) $\langle X^3, 1 \rangle = 0$, $\langle X^3, X \rangle = \frac{2}{5}$, $\langle X^3, u_2 \rangle = 0$ (intégrale d'une fonction impaire). Donc $p(X^3) = \frac{2/5}{2/3} X = \frac{3}{5} X$.

$$d^2 = \|X^3\|^2 - \|p(X^3)\|^2 = \frac{2}{7} - \frac{9}{25} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{7} - \frac{6}{25} = \frac{8}{175}, \text{ donc } d = \sqrt{\frac{8}{175}}.$$

21 Orthogonalité des sous-espaces propres

★★★

(a) Si $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$, alors $\lambda \langle x, y \rangle = \langle Ax, y \rangle = x^T A^T y = x^T Ay = \mu \langle x, y \rangle$. Donc $(\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0$, et $\langle x, y \rangle = 0$ si $\lambda \neq \mu$.

(b) Trace 2, déterminant -3 : valeurs propres 3 et -1. $A(1, 1) = (3, 3)$ et $A(1, -1) = (-1, 1) = -(1, -1)$. Or $\langle (1, 1), (1, -1) \rangle = 0$, conformément à (a).

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 128 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de Licence
L2

Changer de niveau

Niveau : Licence L2

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi



Zyro te conseille la suite



Exercices de maths

Espaces préhilbertiens et euclidiens :
exercices de maths Licence L2



QCM de maths

Espaces préhilbertiens et euclidiens :
QCM de maths Licence L2



Contrôles de maths

Espaces préhilbertiens et euclidiens :
contrôle de maths Licence L2



Exercices de maths

Suites et séries de fonctions : exercices
de maths Licence L2

 Exercices de maths

Séries numériques : exercices de maths
Licence L2

 QCM de maths

Suites et séries de fonctions : QCM de
maths Licence L2

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage