

Espaces préhilbertiens et euclidiens : corrigé du contrôle de maths Licence L2 à télécharger en PDF



Le livre de contrôles corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 50 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigé du contrôle avec le barème détaillé. Compte tes points et repère ce qu'il faut revoir.

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice autorisée seulement quand l'énoncé le précise.

1 Un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$

/ 4 pts

- a. φ est bilinéaire (somme de termes $x_i y_j$) (1 pt) et symétrique car les coefficients de $x_1 y_2$ et $x_2 y_1$ sont égaux (1 pt). Pour la positivité :
- $$\varphi(x, x) = 2x_1^2 + 2x_1 x_2 + 3x_2^2 = x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + 2x_2^2 \geq 0, \text{ et cette somme de carrés est nulle seulement si } x_1 = x_2 = 0 \text{ (1 pt).}$$
- b. $\varphi((1, -1), (1, -1)) = 2 - 1 - 1 + 3 = 3$, donc $\|(1, -1)\| = \sqrt{3}$ (0,5 pt).
 $\varphi((1, 0), (0, 1)) = 1 \neq 0$: ils ne sont pas orthogonaux (0,5 pt).

2 Gram-Schmidt dans $\mathbb{R}^3$

/ 4 pts

Le déterminant des trois vecteurs vaut $1 \times (1 - 0) - 0 + 1 \times (2 - 0) = 3 \neq 0$: la famille est libre (1 pt).

$u_1 = (1, 0, 1)$, $\|u_1\|^2 = 2$. $\langle v_2, u_1 \rangle = 2$, donc $u_2 = (2, 1, 0) - (1, 0, 1) = (1, 1, -1)$, $\|u_2\|^2 = 3$ (1 pt).

$\langle v_3, u_1 \rangle = 1$ et $\langle v_3, u_2 \rangle = 0$, donc $u_3 = (0, 1, 1) - \frac{1}{2}(1, 0, 1) = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$, $\|u_3\|^2 = \frac{3}{2}$ (1 pt).

Base orthonormée : $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1)$ (1 pt).

3 Projection sur un plan

/ 4 pts

a. $n = (2, -1, 2)$ engendre $F^\perp$, avec $\|n\|^2 = 9$ (1 pt).

b. $\langle M, n \rangle = 6 - 1 - 8 = -3$, donc $p_{F^\perp}(M) = -\frac{3}{9}n = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ (1 pt). Alors $p_F(M) = M - p_{F^\perp}(M) = (\frac{11}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{10}{3})$ (1 pt) ; on vérifie $\frac{22}{3} - \frac{2}{3} - \frac{20}{3} = 0$.

c. $d(M, F) = \|M - p_F(M)\| = \frac{|\langle M, n \rangle|}{\|n\|} = \frac{3}{3} = 1$ (1 pt).

4 Un cas de théorème spectral

/ 4 pts

a. A est symétrique réelle, de trace 4 et de déterminant $3 - 3 = 0$: son polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 4\lambda = \lambda(\lambda - 4)$, donc les valeurs propres sont 0 et 4 (1,5 pt).

b. Pour 4 : $(A - 4I)x = 0$ donne $-3x + \sqrt{3}y = 0$, soit $(1, \sqrt{3})$; pour 0 : $x + \sqrt{3}y = 0$, soit $(\sqrt{3}, -1)$. Ils sont orthogonaux ($\sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$) et de norme 2 (1,5 pt). Donc $Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \text{diag}(4, 0)$ (1 pt).

5 Une matrice 3x3 orthogonale

/ 4 pts

- a. Les lignes de $3M$ sont $(2, -2, 1)$, $(1, 2, 2)$, $(2, 1, -2)$, de norme au carré 9, et deux à deux orthogonales : $2 - 4 + 2 = 0$, $4 - 2 - 2 = 0$, $2 + 2 - 4 = 0$. Donc $MM^T = I$, M est orthogonale (2 pts).
- b. $\det(3M) = 2(-4 - 2) + 2(-2 - 4) + (1 - 4) = -27$, donc $\det M = -\frac{27}{27} = -1$ (1 pt).
- c. $(M + I)x = 0$ équivaut à $5x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$, $x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0$, $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$. On obtient $x = (1, 1, -3)$, et $Mx = \frac{1}{3}(-3, -3, 9) = -x$ (1 pt).

Le livre de contrôles corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 50 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de Licence L2

Changer de niveau

Niveau : Licence L2

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi

 Zyro te conseille la suite

 Contrôles de maths

Espaces préhilbertiens et euclidiens :
contrôle de maths Licence L2

 Cours de maths

Espaces préhilbertiens et euclidiens :
cours de maths Licence L2

 QCM de maths

Espaces préhilbertiens et euclidiens :
QCM de maths Licence L2

 Contrôles de maths

Suites et séries de fonctions : contrôle de
maths Licence L2

 Contrôles de maths

 Cours de maths

Séries numériques : contrôle de maths
Licence L2

Suites et séries de fonctions : cours de
maths Licence L2

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage