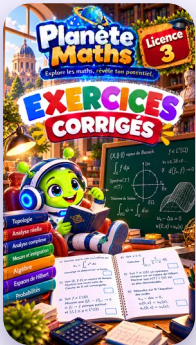


Espaces complets et point fixe : exercices de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

21 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

1 Rang de Cauchy pour $1/n$

★☆☆

Soit $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$. Montrer que (u_n) est de Cauchy et trouver un rang N tel que $|u_p - u_q| < 10^{-3}$ pour tous $p, q \geq N$.

2 Vrai ou faux sur les suites de Cauchy



Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, avec justification.

- a. Toute suite convergente est de Cauchy.
- b. Toute suite bornée est de Cauchy.
- c. Toute suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$ converge dans $\mathbb{Q}$.
- d. Une suite de Cauchy qui a une sous-suite convergente est convergente.

3 Une somme géométrique



Soit $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$. Montrer que $|u_q - u_p| < \frac{1}{2^p}$ pour $q > p$, puis déterminer le plus petit rang N tel que $2^{-N} \leq 10^{-4}$.

4 Contraction affine



Soit $f(x) = \frac{x}{3} + 2$ sur $\mathbb{R}$. Quel est son rapport de contraction ? Trouver son point fixe, puis le plus petit n tel que $|x_n - x^*| < 10^{-3}$ pour $x_0 = 0$.

5 Norme du sup sur $[0,1]$



Dans $C([0, 1])$, on pose $f(x) = x(1 - x)$ et $g(x) = \frac{x}{4}$. Calculer $\|f\|_\infty$ puis $\|f - g\|_\infty$.

6 Complet ou non ?



Parmi $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $[0, 1]$, $]0, 1[$, $\mathbb{Z}$ (distance usuelle), lesquels sont complets ?

7 Une racine itérée



Soit $f(x) = \sqrt{x+2}$ sur $X = [0, 2]$. Montrer que $f(X) \subset X$, que f est contractante et déterminer son point fixe.

8 Résoudre $e^{-x} = x$ par itération



Soit $f(x) = e^{-x}$ sur $X = [0, 4; 0, 7]$. Montrer que f est contractante sur X et trouver le nombre d'itérations garantissant une erreur inférieure à 10^{-3} en partant de $x_0 = 0,5$.

9 Un point fixe qui n'existe pas



Soit $f(x) = x + \frac{1}{x}$ sur $X = [1, +\infty[$. Montrer que $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ pour $x \neq y$, que f n'a pas de point fixe, et expliquer pourquoi cela ne contredit pas le théorème de Banach-Picard.

10 Un système linéaire par itération



On cherche $X = (x, y)$ tel que $X = AX + B$ avec $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, dans $\mathbb{R}^2$ muni de $\|X\|_\infty = \max(|x|, |y|)$.

- Montrer que $X \mapsto AX + B$ est $0,7$ -contractante.
- Trouver le point fixe exactement.
- Combien d'itérations garantissent 10^{-2} depuis $X_0 = (0, 0)$?

11 x puissance n n'est pas de Cauchy



Pour $n \geq 1$, $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$. Calculer $\|f_{2n} - f_n\|_\infty$. La suite est-elle de Cauchy dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$?

12 Une équation intégrale



On cherche $\varphi \in C([0, 1])$ vérifiant $\varphi(x) = x + \frac{1}{3} \int_0^1 xt \varphi(t) dt$. Montrer que l'opérateur T correspondant est contractant, puis résoudre l'équation.

13 Baire et point isolé



Montrer qu'un espace métrique complet non vide sans point isolé est non dénombrable.

14 Famille lipschitzienne



Soit $\mathcal{A} = \{f \in C^1([0, 1]) : \|f\|_\infty \leq 3, \|f'\|_\infty \leq 5\}$. Montrer que $\mathcal{A}$ est équicontinue en donnant explicitement δ pour $\varepsilon = 0,1$. Que dit Ascoli ?

15 L'opérateur de Volterra



Sur $C([0, 1])$, on définit $(V\varphi)(x) = 1 + \int_0^x \varphi(t) dt$.

- Montrer que V est 1-lipschitzien mais pas contractant.
- Montrer par récurrence $|V^n\varphi - V^n\psi|(x) \leq \frac{x^n}{n!} \|\varphi - \psi\|_\infty$.
- En déduire que V a un unique point fixe et le trouver.
- Pour $\varphi_n = V^n(1)$, calculer $e - \varphi_5(1)$ à 10^{-3} près.

16 Dimension infinie et Baire



Soit E un espace de Banach de dimension infinie. Montrer que E n'a pas de base algébrique dénombrable.

17 Newton pour $\sqrt{7}$

★★★★

On pose $g(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{7}{x} \right)$ sur $X = [2, 3]$. Montrer que g est contractante sur X , identifier son point fixe et calculer x_1, x_2, x_3 depuis $x_0 = 3$.

18 Aucune sous-suite convergente

★★★★

Dans $C([0, 1])$:

- Montrer que (x^n) n'a aucune sous-suite uniformément convergente.
- Montrer que $g_n(x) = \frac{x^n}{n}$ est équicontinue et donner sa limite uniforme.

19 L^1 n'est pas complet

★★★★

Pour $n \geq 2$, soit f_n la fonction nulle sur $[0, \frac{1}{2}]$, égale à $n(x - \frac{1}{2})$ sur $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$ et à 1 ensuite. Montrer que (f_n) est de Cauchy pour $\|\cdot\|_1$ dans $C([0, 1])$ mais ne converge pas dans cet espace.

20 Picard pour $y' = t y$

★★★★

On considère $y' = ty$, $y(0) = 1$, et $(T\varphi)(t) = 1 + \int_0^t s \varphi(s) ds$ sur $C([0, 1])$. Montrer que T est $\frac{1}{2}$ -contractant, calculer φ_1, φ_2 depuis $\varphi_0 = 1$, comparer avec la solution $e^{t^2/2}$ en $t = 1$ et vérifier la majoration d'erreur.

21 Distance au point fixe

★★★★

Soit f une application k -contractante sur un complet, de point fixe x^* . Montrer que, pour tout x , $d(x, x^*) \leq \frac{d(x, f(x))}{1 - k}$. Vérifier sur $f(x) = \frac{x}{3} + 2$ avec $x = 0$.

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Exercices corrigés de maths

Espaces complets et point fixe : exercices corrigés de maths Licence L3

Cours de maths

Espaces complets et point fixe : cours de maths Licence L3

QCM de maths

Espaces complets et point fixe : QCM de maths Licence L3

Exercices corrigés de maths

Mesure et intégrale de Lebesgue : exercices corrigés de maths Licence L3

✓ **Exercices corrigés de maths**

Intégrales à paramètres et Fubini :
exercices corrigés de maths Licence L3

■ **Cours de maths**

Mesure et intégrale de Lebesgue : cours
de maths Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage