

Espaces complets et point fixe : cours de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 101 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Dans ce chapitre, on met au centre une idée simple : une suite dont les termes se rapprochent les uns des autres doit avoir une limite. Cette propriété, la **complétude**, est ce qui fait fonctionner l'analyse : elle donne l'existence de solutions d'équations, de points fixes et d'équations différentielles.

1. Suites de Cauchy

D

Suite de Cauchy

Soit (X, d) un espace métrique. Une suite (x_n) de X est **de Cauchy** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, \quad d(x_p, x_q) \leq \varepsilon.$$

L'intérêt de cette définition est de ne pas faire intervenir la limite : on peut tester la convergence « de l'intérieur », sans la connaître.

P

Propriétés

- Toute suite convergente est de Cauchy (inégalité triangulaire : $d(x_p, x_q) \leq d(x_p, \ell) + d(\ell, x_q)$).
- Toute suite de Cauchy est bornée.
- Une suite de Cauchy qui possède une sous-suite convergente vers ℓ converge elle-même vers ℓ .



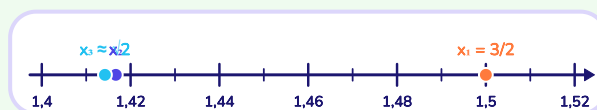
Attention

La réciproque de la première propriété est fausse en général : une suite de Cauchy ne converge pas toujours *dans l'espace considéré*. C'est exactement ce qui sépare les espaces complets des autres.

E

Exemple 1 : une suite de Cauchy rationnelle sans limite rationnelle

Dans $\mathbb{Q}$, posons $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$. On obtient $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{17}{12}$, $x_3 = \frac{577}{408}$. Tous les termes sont rationnels, et la suite se resserre : $x_2 \approx 1,41667$ et $x_3 \approx 1,41422$. Dans $\mathbb{R}$, elle converge vers $\sqrt{2}$; or $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Dans $\mathbb{Q}$, la suite est donc de Cauchy sans converger.



2. Espaces complets et espaces de Banach

D Espace complet, espace de Banach

Un espace métrique est **complet** si toute suite de Cauchy y converge. Un **espace de Banach** est un espace vectoriel normé complet pour la distance $d(x, y) = \|x - y\|$.

Exemples : $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ (toutes les normes y sont équivalentes), tout fermé d'un espace complet. Non complets : $\mathbb{Q}$ et $]0, 1[$ avec la distance usuelle (la suite $1/n$ est de Cauchy dans $]0, 1[$ mais sa limite 0 n'y est pas).

P Propriété

Un sous-ensemble d'un espace complet est complet si et seulement s'il est fermé.

3. Le théorème de Banach-Picard

D Application contractante

Une application $f : X \rightarrow X$ est **contractante** (ou **k -contractante**) s'il existe $k \in [0, 1[$ tel que $d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y)$ pour tous x, y .

P

Théorème de Banach-Picard (point fixe)

Soit (X, d) un espace métrique complet non vide et $f : X \rightarrow X$ une application k -contractante. Alors f possède un **unique** point fixe x^* , et pour tout $x_0 \in X$ la suite $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers x^* , avec la majoration

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1).$$

Démonstration. Par récurrence, $d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$. Pour « »

M

Méthode : appliquer le théorème

1. Choisir un fermé X d'un espace complet (souvent un intervalle fermé de $\mathbb{R}$).
2. Vérifier que $f(X) \subset X$ (l'ensemble est stable).
3. Prouver que f est contractante : sur un intervalle, borner $|f'|$ par $k < 1$ (inégalité des accroissements finis).
4. Conclure à l'existence et à l'unicité, puis utiliser la majoration pour fixer le nombre d'itérations.

E

Exemple 2 : le point fixe de $x \mapsto \frac{1}{2+x}$

Sur $X = [0, 1]$, $f(x) = \frac{1}{2+x}$ vérifie $f(X) = [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}] \subset X$ et

$|f'(x)| = \frac{1}{(2+x)^2} \leq \frac{1}{4}$. Donc f est $\frac{1}{4}$ -contractante : point fixe unique, solution de $x^2 + 2x - 1 = 0$, soit $x^* = \sqrt{2} - 1 \approx 0,41421$. Avec $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ et la majoration devient $d(x_n, x^*) \leq \frac{4^{-n}}{3/4} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3} 4^{-n}$. Pour obtenir 10^{-6} , il suffit de $n = 10$ itérations ($4^{10} = 1\,048\,576$).

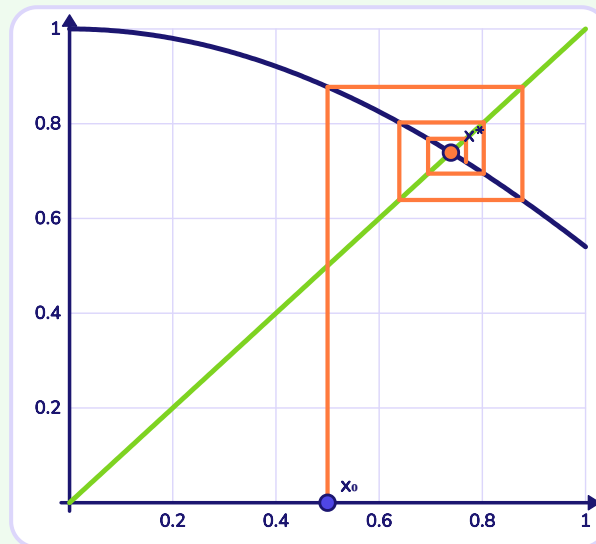
E

Exemple 3 : l'équation $\cos x = x$

Sur $X = [0, 1]$, $\cos(X) = [\cos 1, 1] \subset X$ et $|\sin x| \leq \sin 1 \approx 0,8415 < 1$.

L'application $\cos$ est contractante sur X et l'unique solution est $x^* \approx 0,739085$.

Depuis $x_0 = 0,5$: $x_1 \approx 0,8776$, $x_2 \approx 0,6390$, $x_3 \approx 0,8027$, $x_4 \approx 0,6948$: les termes oscillent autour de x^* en s'en rapprochant (voir la figure).



4. Applications contractantes : variantes et usages



Attention

Il ne suffit pas que $d(f(x), f(y))$ soit uniforme.

P

Variante

Si X est complet et si une itérée f^p est contractante, alors f possède un unique point fixe (celui de f^p est fixé par f , car $f(x^*)$ est aussi point fixe de f^p).

Application aux équations différentielles. Pour $y' = F(t, y)$ avec F lipschitzienne en y , la fonction y est solution du problème de Cauchy si et seulement si c'est un point fixe de l'opérateur $(T\varphi)(t) = y_0 + \int_0^t F(s, \varphi(s)) ds$ agissant sur l'espace de Banach $C([0, a])$. Pour a assez petit, T est contractante : c'est le théorème de Cauchy-Lipschitz, et les itérées de T sont les *itérées de Picard*.

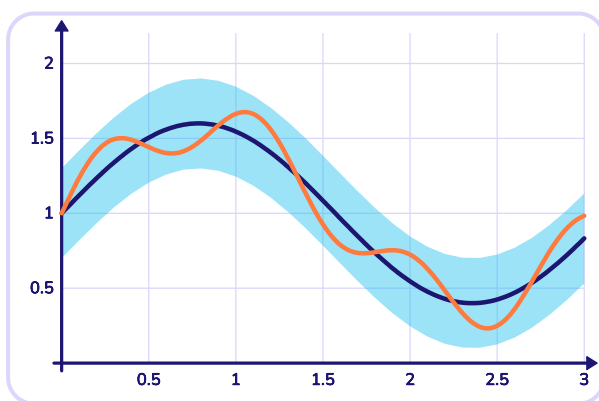
5. Fonctions continues et convergence uniforme

Pour K compact, l'espace $C(K)$ des fonctions continues $K \rightarrow \mathbb{R}$ est muni de la norme $\|f\|_\infty = \max_K |f|$.

P Théorème

$(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Preuve. Si (f_n) est de Cauchy, pour tout x la suite réelle $(f_n(x))$ est de Cauchy, donc converge vers $f(x)$. Dans $|f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$ ($p, q \geq N$) on fait $q \rightarrow \infty$: $|f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout x , c'est-à-dire convergence uniforme. Une limite uniforme de fonctions continues est continue : $f \in C(K)$.





Attention

La complétude dépend de la norme. L'espace $C([0, 1])$ muni de $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$ n'est pas complet : des fonctions continues qui montent de 0 à 1 de plus en plus vite autour de $x = \frac{1}{2}$ forment une suite de Cauchy dont la limite serait l'indicatrice de $] \frac{1}{2}, 1]$, non continue.

6. Le théorème de Baire



Théorème de Baire

Soit X un espace métrique complet. Toute intersection dénombrable d'ouverts denses de X est dense. De façon équivalente, si $X \neq \emptyset$ est réunion dénombrable de fermés F_n , l'un au moins des F_n est d'intérieur non vide.

Idée de la preuve. On part d'un ouvert non vide U et d'ouverts denses O_n . On construit des boules fermées emboîtées $\overline{B}(x_n, r_n) \subset O_n \cap \overline{B}(x_{n-1}, r_{n-1})$ de rayons $r_n < 2^{-n}$; les centres forment une suite de Cauchy, dont la limite appartient à toutes les boules, donc à $U \cap \bigcap O_n$.



Exemple 4 : $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

Si $\mathbb{R} = \bigcup_n \{r_n\}$, chaque singleton est un fermé d'intérieur vide. D'après Baire, un des $\{r_n\}$ devrait être d'intérieur non vide, ce qui est absurde. Plus généralement, un espace complet sans point isolé est non dénombrable.

7. Le théorème d'Ascoli

Dans $\mathbb{R}^n$, les compacts sont les fermés bornés ; en dimension infinie ce n'est plus vrai. Pour $C(K)$, le critère est donné par l'équicontinuité.

D**Équicontinuité**

Une partie $A \subset C(K)$ est **équicontinue** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in A, \forall x, y \in K, \quad d(x, y) \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Le même δ sert pour toutes les fonctions de la famille.

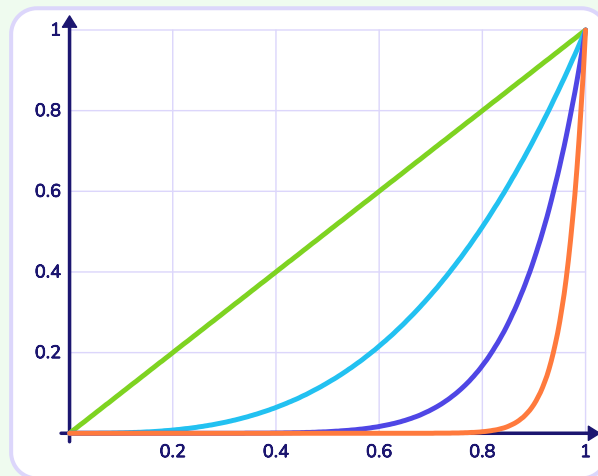
P**Théorème d'Ascoli**

Soit K un espace métrique compact. Une partie $A \subset C(K)$ est relativement compacte pour $\|\cdot\|_\infty$ si et seulement si A est bornée et équicontinue. Toute suite de A admet alors une sous-suite uniformément convergente.

E

Exemple 5 : famille lipschitzienne et famille qui s'aplatit

Soit $A = \{f \in C^1([0, 1]) : \|f\|_\infty \leq 2, \|f'\|_\infty \leq 3\}$. Pour $f \in A$,
 $|f(x) - f(y)| \leq 3|x - y|$: le choix $\delta = \varepsilon/3$ convient pour toutes les fonctions, donc
 A est équicontinue ; elle est bornée, donc relativement compacte. À l'inverse,
 $f_n(x) = x^n$ est bornée par 1 mais non équicontinue en $x = 1$:
 $f_n(1) - f_n(1 - \frac{1}{n}) \rightarrow 1 - e^{-1}$. Aucune sous-suite de (f_n) ne converge
uniformément (la limite simple est discontinue en 1).



!

Astuce de Zyro

Sur ma planète, on dit qu'une suite « ne peut pas s'échapper de son espace » quand il est complet. Pour un point fixe, pense toujours aux trois questions : espace complet ? application stable ? rapport $k < 1$?

À retenir

- Une suite de Cauchy est bornée ; toute suite convergente est de Cauchy, la réciproque exige la complétude.
- $\mathbb{R}^n$, les fermés d'un complet et $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ sont complets ; $\mathbb{Q},]0, 1[$ ne le sont pas.
- Banach-Picard : f k -contractante ($k < 1$) sur un complet non vide $\Rightarrow$ point fixe unique et
$$d(x_n, x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1).$$
- Baire : dans un complet, une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense ; un complet non vide n'est pas réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide.
- Ascoli : dans $C(K)$, relativement compact $\Leftrightarrow$ borné et équicontinu.

Le livre de cours de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 101 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

 Contrôles de maths

Espaces complets et point fixe : exercices de maths Licence L3

Espaces complets et point fixe : contrôle de maths Licence L3

 **QCM de maths**

Espaces complets et point fixe : QCM de maths Licence L3

 **Exercices de maths**

Mesure et intégrale de Lebesgue : exercices de maths Licence L3

 **Exercices de maths**

Intégrales à paramètres et Fubini : exercices de maths Licence L3

 **Contrôles de maths**

Mesure et intégrale de Lebesgue : contrôle de maths Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage