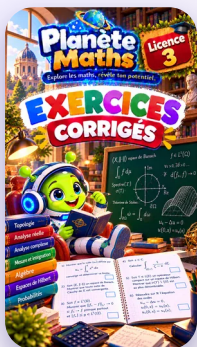


Espaces complets et point fixe : exercices corrigés de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Rang de Cauchy pour $1/n$



Pour $p, q \geq N$, les deux nombres $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$ sont dans $]0, \frac{1}{N}]$, donc leur différence est en valeur absolue strictement inférieure à $\frac{1}{N}$. Pour $\varepsilon > 0$, il suffit de prendre $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$: la suite est de Cauchy.

Pour 10^{-3} : $N = 1000$ convient, car $|u_p - u_q| < \frac{1}{1000}$.

2 Vrai ou faux sur les suites de Cauchy



- a. Vrai : $d(x_p, x_q) \leq d(x_p, \ell) + d(\ell, x_q)$, qui est petit.
- b. Faux : $u_n = (-1)^n$ est bornée, mais $|u_{n+1} - u_n| = 2$ pour tout n .
- c. Faux : la suite de Newton $1, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \dots$ est de Cauchy et converge vers $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
- d. Vrai : si $u_{\varphi(n)} \rightarrow \ell$, on écrit $d(u_n, \ell) \leq d(u_n, u_{\varphi(n)}) + d(u_{\varphi(n)}, \ell)$, deux termes qui tendent vers 0.

3 Une somme géométrique



On a $u_n = 1 - 2^{-n}$, donc pour $q > p$: $u_q - u_p = 2^{-p} - 2^{-q} \in]0, 2^{-p}[$.

On cherche $2^N \geq 10^4$. Comme $2^{13} = 8192 < 10^4$ et $2^{14} = 16384 \geq 10^4$, le plus petit rang est $N = 14$. Ainsi $|u_q - u_p| < 10^{-4}$ dès que $p \geq 14$.

4 Contraction affine



$|f(x) - f(y)| = \frac{1}{3}|x - y|$: f est $\frac{1}{3}$ -contractante sur $\mathbb{R}$ complet. Le point fixe vérifie $x = \frac{x}{3} + 2$, donc $x^* = 3$.

Comme $x_n - 3 = \frac{1}{3}(x_{n-1} - 3)$, on a $|x_n - 3| = 3 \cdot 3^{-n} = 3^{1-n}$. On veut $3^{n-1} > 1000$; $3^6 = 729$ ne suffit pas, $3^7 = 2187$ oui. Donc $n - 1 \geq 7$: $n = 8$.

5 Norme du sup sur $[0,1]$



$f(x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ est maximale en $\frac{1}{2}$: $\|f\|_\infty = \frac{1}{4}$.

$h = f - g = \frac{3x}{4} - x^2$. Son maximum est en $x = \frac{3}{8}$: $h = \frac{9}{64}$. Mais en $x = 1$, $h(1) = -\frac{1}{4}$, et $\frac{1}{4} > \frac{9}{64}$. Donc $\|f - g\|_\infty = \frac{1}{4}$.

6 Complet ou non ?



$\mathbb{R}$: oui. $[0, 1]$: oui, fermé de $\mathbb{R}$. $\mathbb{Z}$: oui, une suite de Cauchy y est stationnaire (distance entre deux termes distincts au moins 1). $\mathbb{Q}$: non (suite de Newton vers $\sqrt{2}$). $]0, 1[$: non ($\frac{1}{n}$ est de Cauchy et tend vers 0 $\notin]0, 1[$).

7 Une racine itérée



f est croissante, $f(0) = \sqrt{2}$ et $f(2) = 2$, donc $f(X) = [\sqrt{2}, 2] \subset X$.

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0,354 = k < 1$ sur X . Par Banach-Picard, il y a un unique point fixe : $x = \sqrt{x+2} \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x^* = 2$ (l'autre racine -1 n'est pas dans X).

8 Résoudre $e^{-x} = x$ par itération



f est décroissante : $f(X) = [e^{-0,7}, e^{-0,4}] \approx [0,4966; 0,6703] \subset X$. De plus $|f'(x)| = e^{-x} \leq e^{-0,4} \approx 0,6703 = k$.

$x_1 = e^{-0,5} \approx 0,6065$, $d(x_0, x_1) \approx 0,1065$. On cherche $\frac{k^n}{1-k} \times 0,1065 \leq 10^{-3}$. Le plus petit entier convenable est $n = 15$. Le point fixe vaut environ 0,5671.

9 Un point fixe qui n'existe pas



$f(x) - f(y) = (x - y) \left(1 - \frac{1}{xy}\right)$. Pour $x \neq y$ dans X , $xy > 1$, donc le facteur est dans $]0, 1[$: l'inégalité stricte est vraie.

$f(x) = x \iff \frac{1}{x} = 0$, impossible : pas de point fixe. Le théorème exige un rapport $k < 1$ uniforme ; ici $\sup_{x \neq y} \left(1 - \frac{1}{xy}\right) = 1$ (prendre x, y grands) : f n'est pas contractante.

10 Un système linéaire par itération



- a. $\|AX\|_\infty \leq \max(0,2 + 0,1; 0,3 + 0,4)\|X\|_\infty = 0,7\|X\|_\infty$: somme maximale des lignes = 0,7.
- b. $(I - A)X = B$ donne $0,8x - 0,1y = 1$ et $-0,3x + 0,6y = 2$. Déterminant $0,48 - 0,03 = 0,45$. Alors $x = \frac{16}{9}$, $y = \frac{38}{9}$. Vérification : $0,2 \cdot \frac{16}{9} + 0,1 \cdot \frac{38}{9} + 1 = \frac{16}{9}$.
- c. $X_1 = (1, 2)$, $\|X_1 - X_0\| = 2$. On cherche $\frac{0,7^n}{0,3} \cdot 2 \leq 0,01$: le plus petit entier est $n = 19$.

11 x puissance n n'est pas de Cauchy



On pose $t = x^n \in [0, 1]$: $f_n(x) - f_{2n}(x) = t - t^2$, dont le maximum sur $[0, 1]$ est $\frac{1}{4}$ en $t = \frac{1}{2}$, atteint pour $x = 2^{-1/n}$. Donc $\|f_{2n} - f_n\|_\infty = \frac{1}{4}$ pour tout n .

La suite n'est pas de Cauchy (la quantité ne tend pas vers 0), ce qui est cohérent avec l'absence de limite uniforme : la limite simple est discontinue en 1.

12 Une équation intégrale



$|T\varphi(x) - T\psi(x)| \leq \frac{1}{3} \int_0^1 x t |\varphi - \psi| dt \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \|\varphi - \psi\|_\infty$, donc T est $\frac{1}{6}$ -contractant sur le Banach $C([0, 1])$: solution unique.

On cherche $\varphi(x) = x(1 + c)$ avec $c = \frac{1}{3} \int_0^1 t \varphi(t) dt = \frac{1+c}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1+c}{9}$, donc $c = \frac{1}{8}$ et $\varphi(x) = \frac{9x}{8}$. Vérification : $T\varphi(x) = x + \frac{x}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{9x}{8}$.

13 Baire et point isolé



Supposons $X = \{x_0, x_1, \dots\}$ dénombrable. Chaque singleton $\{x_n\}$ est fermé ; il est d'intérieur vide car x_n n'est pas isolé (aucune boule n'est réduite à x_n). Alors X est réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide, ce qui contredit le théorème de Baire (X complet non vide). Donc X n'est pas dénombrable.

14 Famille lipschitzienne



Par les accroissements finis, $|f(x) - f(y)| \leq 5|x - y|$ pour tout $f \in A$. Pour $\varepsilon = 0,1$, $\delta = \frac{\varepsilon}{5} = 0,02$ convient pour toutes les fonctions de A à la fois.

A est bornée (par 3) et équicontinue ; $[0, 1]$ est compact, donc A est relativement compacte dans $C([0, 1])$: toute suite de A a une sous-suite qui converge uniformément.

15 L'opérateur de Volterra



a. $|V\varphi - V\psi|(x) \leq x\|\varphi - \psi\|_\infty \leq \|\varphi - \psi\|_\infty$. Avec $\varphi = 1, \psi = 0$, $\|V\varphi - V\psi\| = 1 = \|\varphi - \psi\|$: le rapport 1 est atteint.

b. Pour $n = 1$ c'est (a). Si c'est vrai au rang n ,

$$|V^{n+1}\varphi - V^{n+1}\psi|(x) \leq \int_0^x \frac{t^n}{n!} dt \|\varphi - \psi\| = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \|\varphi - \psi\|.$$

c. Pour $n = 2$, $\frac{1}{2!} = \frac{1}{2} < 1$: V^2 est contractant, donc V a un unique point fixe, par la variante du chapitre. Il vérifie $\varphi' = \varphi$, $\varphi(0) = 1$: $\varphi(x) = e^x$.

d. $\varphi_5(x) = \sum_{k=0}^5 \frac{x^k}{k!}$, donc $\varphi_5(1) \approx 2,71667$ et $e - \varphi_5(1) \approx 0,0016$, soit environ $1,6 \times 10^{-3}$.

16 Dimension infinie et Baire



Supposons que (e_n) soit une base algébrique. Posons $F_n = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. Alors $E = \bigcup_n F_n$.

Chaque F_n est de dimension finie, donc fermé ; il est strictement inclus dans E (dimension infinie) et c'est un sous-espace propre : il est d'intérieur vide (s'il contenait une boule, il contiendrait E par homothétie et translation). Cela contredit le théorème de Baire.

17 Newton pour $\sqrt{7}$



g a pour minimum $\sqrt{7} \approx 2,6458$; $g(2) = 2,75$, $g(3) \approx 2,6667$, donc

$$g(X) = [\sqrt{7}, 2,75] \subset X.$$

$g'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{7}{x^2} \right)$ est croissante de $g'(2) = -\frac{3}{8}$ à $g'(3) = \frac{1}{9}$: $|g'| \leq \frac{3}{8} = k$. Le point fixe vérifie $x^2 = 7$, donc $x^* = \sqrt{7}$.

$$x_1 = \frac{8}{3} \approx 2,66667, x_2 \approx 2,64583, x_3 \approx 2,645751 \text{ (valeur exacte de } \sqrt{7} \approx 2,645751).$$

18 Aucune sous-suite convergente



a. Toute sous-suite converge simplement vers la fonction qui vaut 0 sur $[0, 1[$ et 1 en 1, discontinue. Une limite uniforme de fonctions continues serait continue : contradiction.

b. $g'_n(x) = x^{n-1}$ donc $|g_n(x) - g_n(y)| \leq |x - y|$: $\delta = \varepsilon$ convient pour tout n . Et $\|g_n\|_\infty = \frac{1}{n} \rightarrow 0$: convergence uniforme vers 0, conformément à Ascoli (famille bornée et équicontinue).

19 L1 n'est pas complet

★★★★

Pour $m > n$, $f_m \geq f_n$. Donc $\|f_m - f_n\|_1 = \int f_m - \int f_n$. Or $\int_0^1 f_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$ (l'aire sous le plateau vaut $\frac{1}{2}$, moins le triangle $\frac{1}{2n}$). Ainsi $\|f_m - f_n\|_1 = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2m} < \frac{1}{2n}$: suite de Cauchy.

Si $f_n \rightarrow f$ avec f continue, alors $f = 0$ sur $[0, \frac{1}{2}[$ et $f = 1$ sur $]\frac{1}{2}, 1]$ presque partout, donc par continuité $f(\frac{1}{2}) = 0$ et $f(\frac{1}{2}) = 1$: absurde. L'espace n'est pas complet.

20 Picard pour $y' = t y$

★★★★

$$|T\varphi - T\psi|(t) \leq \int_0^t s ds \|\varphi - \psi\| = \frac{t^2}{2} \|\varphi - \psi\| \leq \frac{1}{2} \|\varphi - \psi\|.$$

$\varphi_1 = 1 + \frac{t^2}{2}$, $\varphi_2 = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8}$. En $t = 1$: $\varphi_2(1) = 1,625$ et $e^{1/2} \approx 1,6487$, écart $\approx 0,0237$.

Majoration : $\|\varphi_1 - \varphi_0\| = \frac{1}{2}$, donc $\|\varphi_2 - \varphi\| \leq \frac{(1/2)^2}{1/2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. L'écart observé **0,0237** est bien inférieur à **0,25**.

21 Distance au point fixe

★★★★

$d(x, x^*) \leq d(x, f(x)) + d(f(x), f(x^*)) \leq d(x, f(x)) + k d(x, x^*)$, donc $(1 - k)d(x, x^*) \leq d(x, f(x))$.

Ici $k = \frac{1}{3}$, $d(0, f(0)) = 2$: borne $\frac{2}{2/3} = 3$. La distance réelle est $|0 - 3| = 3$: la majoration est optimale pour cette application.

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Espaces complets et point fixe : exercices de maths Licence L3

QCM de maths

Espaces complets et point fixe : QCM de maths Licence L3

Contrôles de maths

Espaces complets et point fixe : contrôle de maths Licence L3

Exercices de maths

Mesure et intégrale de Lebesgue : exercices de maths Licence L3

 Exercices de maths

Intégrales à paramètres et Fubini :
exercices de maths Licence L3

 QCM de maths

Mesure et intégrale de Lebesgue : QCM
de maths Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage