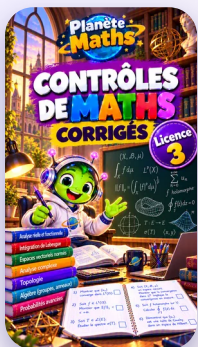


Espaces complets et point fixe : corrigé du contrôle de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre de contrôles corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 52 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigé du contrôle avec le barème détaillé. Compte tes points et repère ce qu'il faut revoir.

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice autorisée seulement quand l'énoncé le précise.

1 Suite de Cauchy

/ 4 pts

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} : \text{somme télescopique, } v_n = 1 - \frac{1}{n+1}. (1 \text{ pt})$$

$$\text{Pour } q > p, v_q - v_p = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{q+1} \in \left] 0, \frac{1}{p+1} \right[: \text{de Cauchy. (1 pt)}$$

$$N = 999 \text{ donne } \frac{1}{N+1} = 10^{-3}, \text{ donc } |v_q - v_p| < 10^{-3} \text{ pour } p, q \geq 999. (1 \text{ pt})$$

Limite : 1 (et $1 \in \mathbb{Q}$). (1 pt)

2 Un point fixe par contraction

/ 4 pts

f est décroissante : $f(X) = \left[\frac{1}{4 + 1/16}, \frac{1}{4} \right] \approx [0,2462; 0,25] \subset X$. (1 pt)

$|f'(x)| = \frac{2x}{(4+x^2)^2} \leq \frac{2 \cdot \frac{1}{4}}{16} = \frac{1}{32}$ sur X , donc $\frac{1}{8}$ convient a fortiori. (1 pt)

$x = f(x) \iff x(4+x^2) = 1 \iff x^3 + 4x - 1 = 0$, racine unique $x^* \approx 0,24627$. (1 pt)

$x_1 = \frac{1}{4}$, $d(x_0, x_1) = \frac{1}{4}$. On veut $\frac{8^{-n}}{7/8} \cdot \frac{1}{4} \leq 10^{-6}$, c'est-à-dire $8^n \geq 285\,715 : n = 7$. (1 pt)

3 Baire et les rationnels

/ 4 pts

Supposons $\mathbb{Q} = \bigcap_n O_n$; chaque O_n contient $\mathbb{Q}$, donc est un ouvert dense. (1 pt)

Énumérons $\mathbb{Q} = \{q_k\}$ et posons $U_k = \mathbb{R} \setminus \{q_k\}$, ouvert dense. (1 pt)

Les O_n et U_k forment une famille dénombrable d'ouverts denses de $\mathbb{R}$ complet. Par Baire, leur intersection est dense, donc non vide. (1 pt)

Mais un point de cette intersection est dans $\bigcap O_n = \mathbb{Q}$ et dans tous les U_k , donc n'est aucun q_k : absurde. (1 pt)

4 Ascoli

/ 4 pts

(a) $|a \sin(bx)| \leq 2$ et $|(a \sin bx)'| = |ab \cos bx| \leq 6$: bornée et 6-lipschitzienne donc équicontinue ($\delta = \varepsilon/6$). (1 pt) Par Ascoli, relativement compacte. (1 pt)

(b) Pour $x_n = \frac{\pi}{2n}$ et $y = 0$, $|\sin(nx_n) - \sin 0| = 1$ alors que $|x_n - y| \rightarrow 0$: la famille n'est pas équicontinue. (1 pt) Si une sous-suite $(\sin(n_k x))$ convergeait uniformément vers une limite continue, elle serait équicontinue (une suite uniformément convergente de fonctions continues sur un compact l'est). Or avec $x = \frac{\pi}{2n_k}$ et $y = 0$ on trouve encore l'écart 1 pour $n_k \rightarrow \infty$: contradiction, aucune sous-suite ne converge uniformément. (1 pt)

5

Picard pour $y' = 2y$

/ 4 pts

$$|T\varphi - T\psi|(t) \leq 2t\|\varphi - \psi\| \leq \frac{1}{2}\|\varphi - \psi\| \text{ pour } t \leq \frac{1}{4}. \text{ (1 pt)}$$

$$\varphi_1 = 1 + 2t, \varphi_2 = 1 + 2t + 2t^2. \text{ (1 pt)}$$

$$\varphi_2\left(\frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 1,625, e^{1/2} \approx 1,6487. \text{ (1 pt)}$$

$$\text{Majoration : } \|\varphi_2 - \varphi\| \leq \frac{(1/2)^2}{1/2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} ; \text{ l'\'ecart } \mathbf{0,0237} \text{ est compatible. (1 pt)}$$

Le livre de contrôles corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 52 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)**Zyro te conseille la suite****Contrôles de maths**

Espaces complets et point fixe : contrôle de maths Licence L3

**Cours de maths**

Espaces complets et point fixe : cours de maths Licence L3

 QCM de maths

Espaces complets et point fixe : QCM de maths Licence L3

 Contrôles de maths

Mesure et intégrale de Lebesgue : contrôle de maths Licence L3

 Contrôles de maths

Intégrales à paramètres et Fubini : contrôle de maths Licence L3

 Cours de maths

Mesure et intégrale de Lebesgue : cours de maths Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage