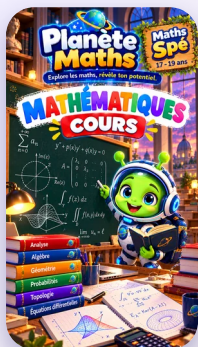


Équations différentielles linéaires : cours de maths Maths Spé à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Des populations en compétition, un circuit électrique, un pendule amorti : tous ces phénomènes obéissent à des équations différentielles **linéaires**. Ce chapitre rassemble les outils qui permettent de les résoudre complètement : l'exponentielle de matrice pour les systèmes, la variation des constantes pour les seconds membres, le Wronskien pour l'ordre 2, et enfin une lecture qualitative du comportement des solutions.

1. Systèmes différentiels linéaires

D Système différentiel linéaire

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ continues. Le système $(E) : X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ est un système différentiel linéaire d'ordre 1. Le système **homogène associé** est $(H) : X' = A(t)X$. Il est à **coefficients constants** si A est constante.

Une équation d'ordre n se ramène à un système d'ordre 1 : pour $y'' + ay' + by = f$, on pose $X = (y, y')$ et on obtient $X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$.

2. Le théorème de Cauchy linéaire

P Théorème de Cauchy linéaire

Si A et B sont continues sur I , alors pour tout $t_0 \in I$ et tout $X_0 \in \mathbb{K}^n$, le problème de Cauchy $X' = A(t)X + B(t)$, $X(t_0) = X_0$ admet une **unique solution**, et celle-ci est définie sur **tout l'intervalle I** .

Conséquences : l'ensemble S_H des solutions de (H) est un espace vectoriel de **dimension n** (l'application $X \mapsto X(t_0)$ est un isomorphisme sur $\mathbb{K}^n$), et l'ensemble des solutions de (E) est un espace affine dirigé par S_H : **solution générale = solution particulière + solution générale de (H)** . Une solution de (H) qui s'annule en un instant est la solution nulle.

3. Exponentielle de matrice

D Exponentielle d'une matrice

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ converge absolument. L'application $t \mapsto e^{tA}$ est de classe C^∞ et $\frac{d}{dt}e^{tA} = A e^{tA}$.

P Propriétés

Si $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^A e^B$ (faux en général). La matrice e^A est toujours inversible, d'inverse e^{-A} . Si $A = PDP^{-1}$, alors $e^A = P e^D P^{-1}$, et $e^D = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$ si $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

P Solutions à coefficients constants

La solution du problème $X' = AX$, $X(t_0) = X_0$ est $X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0$.

4. Calcul pratique : coefficients constants

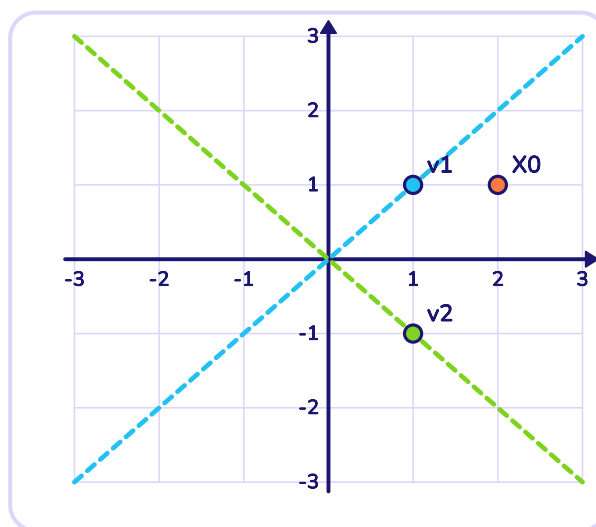
M Méthode

1. Cherche les valeurs propres de A (polynôme caractéristique).
2. Si A est diagonalisable : base propre (v_i), solutions $X(t) = \sum c_i e^{\lambda_i t} v_i$.
3. Sinon, écris $A = \lambda I + N$ avec N nilpotente : $e^{tA} = e^{\lambda t}(I + tN + \dots)$.
4. Détermine les constantes avec la condition initiale.

E Exemple 1 : cas diagonalisable

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$. Les vecteurs propres sont $v_1 = (1, 1)$ pour 3 et $v_2 = (1, -1)$ pour -1 . La solution générale de $X' = AX$ est

$$X(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



Sur la figure, la droite $y = x$ porte v_1 (direction dilatée par e^{3t}), la droite $y = -x$ porte v_2 (direction contractée par e^{-t}) ; le point $X_0 = (2, 1)$ se décompose en $\frac{3}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$.

E Exemple 2 : cas non diagonalisable

Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^2 = 0$: comme $2I$ commute avec N , $e^{tA} = e^{2t}(I + tN) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Méthode de variation des constantes

P Formule de variation des constantes

Pour $X' = AX + B(t)$ avec A constante, la solution vérifiant $X(t_0) = X_0$ est

$$X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} B(s) ds.$$

On cherche en effet $X(t) = e^{tA} C(t)$; en dérivant, $e^{tA} C'(t) = B(t)$, donc $C'(t) = e^{-tA} B(t)$, et il reste à intégrer.

E Exemple 3

Reprenons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ avec $B(t) = (0, e^{2t})$. On a

$e^{-sA} B(s) = e^{-2s} \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc $\int_0^t e^{-sA} B(s) ds = (-t^2/2, t)$
et

$$X_p(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t^2/2 \\ t \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t \end{pmatrix}.$$



Piège

La formule $e^{A+B} = e^A e^B$ exige que A et B commutent. Pour $e^{(t-s)A}$ il n'y a pas de problème car tA et sA commutent toujours.

6. Équations linéaires scalaires d'ordre 2

Considérons $(E_2) : y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t)$ avec a, b, f continues sur I . Par Cauchy (via le système associé), l'espace S_H des solutions de l'équation homogène est de dimension 2, et le problème $y(t_0) = \alpha, y'(t_0) = \beta$ a une unique solution sur I .



Coefficients constants $y'' + ay' + by = 0$

Soit $r^2 + ar + b = 0$ l'équation caractéristique, de discriminant Δ .

- $\Delta > 0$: racines réelles $r_1 \neq r_2, y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$.
- $\Delta = 0$: racine double $r, y = (c_1 + c_2 t) e^{rt}$.
- $\Delta < 0$: racines $\alpha \pm i\omega, y = e^{\alpha t} (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t)$.



Exemple 4

$y'' + 2y' + 5y = 0$ a pour racines $-1 \pm 2i$: $y = e^{-t} (c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t)$.

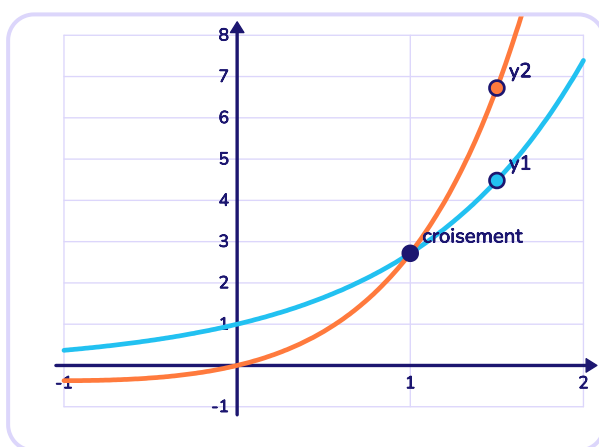
7. Le Wronskien

D Wronskien

Pour deux solutions y_1, y_2 de $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$, le Wronskien est $W(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$.

P Propriétés (formule d'Abel)

$W' = -a(t)W$, donc $W(t) = W(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$. Ainsi W est soit identiquement nul, soit **jamais nul** ; (y_1, y_2) est une base de S_H si et seulement si W ne s'annule pas.



Sur la figure, $y_1 = e^t$ et $y_2 = te^t$ résolvent $y'' - 2y' + y = 0$; leur Wronskien vaut e^{2t} , jamais nul.

M**Variation des constantes pour l'ordre 2**

Avec une base (y_1, y_2) , on cherche $y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2$ en imposant le système

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0, \quad c_1' y_1' + c_2' y_2' = f.$$

Il se résout toujours car son déterminant est $W \neq 0$: $c_1' = -y_2 f / W$ et $c_2' = y_1 f / W$.

E**Exemple 5**

Pour $y'' - 2y' + y = e^t/t$ sur $]0, +\infty[$, $W = e^{2t}$, $c_1' = -1$, $c_2' = 1/t$. D'où $c_1 = -t$, $c_2 = \ln t$ et $y_p = (-t + t \ln t)e^t$, soit, à un terme de S_H près, $y_p = te^t \ln t$.

!**Astuce de Zyro**

Si le second membre est de la forme polynôme fois e^{mt} et que m est racine de l'équation caractéristique de multiplicité k , cherche directement

$y_p = t^k \times (\text{même forme})$: tu évites tout le calcul de Wronskien.

8. Étude qualitative des solutions

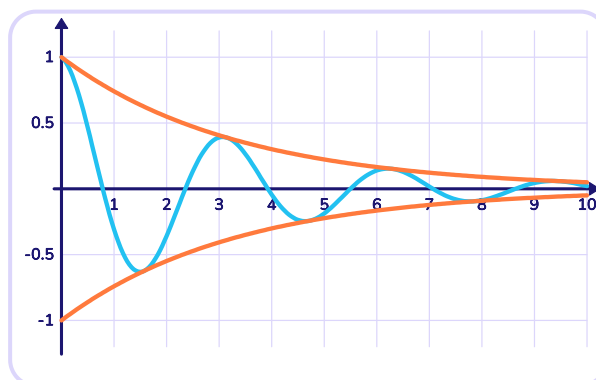
P

Comportement asymptotique (A constante)

- Si toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle < 0 , toute solution de $X' = AX$ tend vers 0 en $+\infty$ (stabilité asymptotique).
- Si l'une d'elles a une partie réelle > 0 , il existe des solutions non bornées (instabilité).
- Si les valeurs propres sont imaginaires pures et A diagonalisable sur $\mathbb{C}$, les solutions restent bornées (centre).

Équations différentielles Maths Spé : trois portraits de phase dans le plan, un col pour les valeurs propres 3 et -1, un foyer stable spiralant vers l'origine et un centre aux trajectoires fermées

L'oscillateur amorti $y'' + 2\lambda y' + \omega_0^2 y = 0$ illustre ces cas : régime pseudo-périodique si $\lambda < \omega_0$, critique si $\lambda = \omega_0$, apériodique si $\lambda > \omega_0$. Dans tous ces cas avec $\lambda > 0$, la solution tend vers 0.





Piège

Un Wronskien nul en **un point** n'implique la liaison (dépendance) des fonctions que pour des solutions d'**une même** équation. Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto t^2$ ont un Wronskien t^2 , nul en 0 : elles sont pourtant indépendantes, mais ne sont pas solutions d'une même équation $y'' + ay' + by = 0$ à coefficients continus sur $\mathbb{R}$.

À retenir

- Cauchy linéaire : solution **unique et globale** sur I ; $\dim S_H = n$; solution générale = particulière + homogène.
- $X' = AX, X(t_0) = X_0$ a pour solution $e^{(t-t_0)A}X_0$; $e^{A+B} = e^A e^B$ seulement si $AB = BA$.
- Diagonalisation : $X = \sum c_i e^{\lambda_i t} v_i$; sinon décomposition $\lambda I + N$.
- Variation des constantes : $X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}B(s) ds$.
- Ordre 2 : équation caractéristique, Wronskien (Abel : $W' = -aW$), système $c'_1 y_1 + c'_2 y_2 = 0$.
- Stabilité : partie réelle des valeurs propres $< 0 \Rightarrow$ solutions $\rightarrow 0$.

Le livre de cours de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

 Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Équations différentielles linéaires :
exercices de maths Maths Spé

 Contrôles de maths

Équations différentielles linéaires :
contrôle de maths Maths Spé

 QCM de maths

Équations différentielles linéaires : QCM
de maths Maths Spé

 Exercices de maths

Probabilités et variables aléatoires
discrètes : exercices de maths Maths Spé

 Exercices de maths

 Contrôles de maths

Algèbre générale et dualité : exercices de maths Maths Spé

Probabilités et variables aléatoires discrètes : contrôle de maths Maths Spé

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage