

Équations différentielles : cours de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 101 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Un circuit électrique qui se charge, une population qui se partage un milieu, un pendule qui s'amortit : toutes ces situations se modélisent par une équation différentielle $y' = f(t, y)$. Ce chapitre répond à trois questions de fond. **Une solution existe-t-elle, est-elle unique, jusqu'où vit-elle ?** (Cauchy-Lipschitz, solutions maximales, lemme de Gronwall.) **Comment résoudre explicitement un système linéaire ?** (exponentielle de matrice.) **Que devient une solution en temps long ?** (stabilité et portraits de phase).

1. Problème de Cauchy

D Problème de Cauchy

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue. Une **solution** de $y' = f(t, y)$ est une fonction dérivable $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie sur un intervalle I , telle que $(t, y(t)) \in U$ et $y'(t) = f(t, y(t))$ pour tout $t \in I$. Le **problème de Cauchy** demande en plus la condition initiale $y(t_0) = y_0$.

Comme f est continue, y est de classe C^1 et le problème équivaut à l'équation intégrale

$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$. Toute équation d'ordre p se ramène à l'ordre 1 : pour $y^{(p)} = g(t, y, \dots, y^{(p-1)})$, on pose $Y = (y, y', \dots, y^{(p-1)})$ et on obtient un système d'ordre 1 en dimension p . Par exemple, $y'' + 3y' + 2y = 0$ devient $Y' = AY$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Théorème de Cauchy-Lipschitz

D Fonction localement lipschitzienne en y

f est **localement lipschitzienne en y** si tout point de U possède un voisinage V et une constante k tels que $\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|$ pour tous $(t, y_1), (t, y_2)$ dans V . C'est le cas dès que f est de classe C^1 par rapport à y .

P Théorème de Cauchy-Lipschitz

Si f est continue et localement lipschitzienne en y , alors pour tout $(t_0, y_0) \in U$, le problème de Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ admet une solution, et deux solutions qui coïncident en un instant coïncident partout sur l'intersection de leurs intervalles.

L'idée de la preuve : sur un petit intervalle $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$, l'opérateur $\Phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$ est une contraction de l'espace complet des fonctions continues à valeurs dans une boule fermée autour de y_0 : le point fixe de Picard fournit la solution locale, et il est unique.

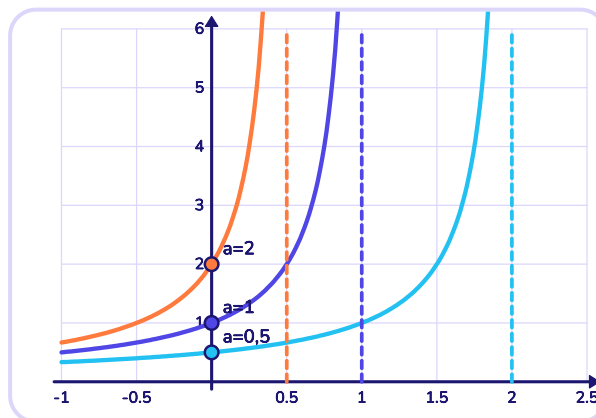
3. Solutions maximales

P Solution maximale

Sous les hypothèses de Cauchy-Lipschitz, toute solution se prolonge en une unique **solution maximale** $y :]T_-, T_+[\rightarrow \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire une solution qu'aucune autre ne prolonge. De plus, la solution maximale **sort de tout compact** de U quand $t \rightarrow T_{\pm}$. Si $U = I \times \mathbb{R}^n$ et si $T_+ < \sup I$, alors $\|y(t)\| \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow T_+$: c'est l'**explosion en temps fini**.

E Exemple 1 : explosion en temps fini

Pour $y' = y^2$ et $y(0) = a > 0$, la fonction $f(y) = y^2$ est C^1 , donc Cauchy-Lipschitz s'applique. En séparant les variables, $-\frac{1}{y} = t - \frac{1}{a}$, soit $y(t) = \frac{a}{1 - at}$. La solution maximale est définie sur $] -\infty, 1/a[$ et explose en $T_+ = 1/a$: plus la donnée initiale est grande, plus l'explosion est rapide.





Sans hypothèse lipschitzienne, plus d'unicité

Pour $y' = 3y^{2/3}$ avec $y(0) = 0$, les fonctions $y(t) = 0$ et $y(t) = t^3$ sont solutions : en effet $3(t^3)^{2/3} = 3t^2 = (t^3)'$. La fonction $y \mapsto y^{2/3}$ n'est pas lipschitzienne en 0 . La continuité seule garantit l'existence (théorème de Peano), jamais l'unicité.



Cas global

Si $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et **globalement lipschitzienne en y** (constante k indépendante de t sur tout segment), les solutions maximales sont définies sur I tout entier.

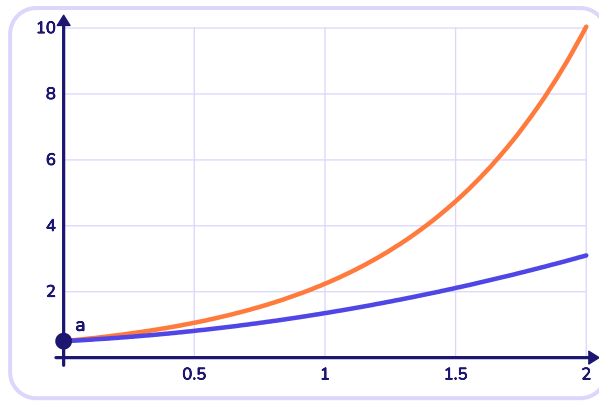
4. Lemme de Gronwall



Lemme de Gronwall (forme intégrale)

Soit $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue et $a, L \geq 0$ tels que $u(t) \leq a + L \int_0^t u(s) ds$ pour tout t . Alors $u(t) \leq a e^{Lt}$ pour tout $t \in [0, T]$.

Démonstration. Posons $v(t) = a + L \int_0^t u$. La fonction v est dérivable et $v' = Lu \leq Lv$. Donc $(v e^{-Lt})' = (v' - Lv)e^{-Lt} \leq 0$, la fonction $v e^{-Lt}$ est décroissante et $v(t) \leq v(0)e^{Lt} = a e^{Lt}$. Comme $u \leq v$, on conclut.



E Exemple 2 : dépendance continue

Soit $f(t, y) = \cos y + t$, lipschitzienne en y de constante 1 (car $|\sin| \leq 1$). Si y_1, y_2 sont deux solutions, alors $u = |y_1 - y_2|$ vérifie $u(t) \leq u(0) + \int_0^t u$, d'où $u(t) \leq u(0) e^t$. Avec $u(0) = 0,01$, on obtient $u(3) \leq 0,01 e^3 \approx 0,20$: l'écart reste contrôlé, mais il peut croître exponentiellement. Si $u(0) = 0$, on retrouve l'unicité.

I 5. Systèmes linéaires

P Systèmes linéaires

Soit $A : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ et $B : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ continues. Pour tout (t_0, Y_0) , le problème $Y' = A(t)Y + B(t)$, $Y(t_0) = Y_0$ admet une unique solution, définie sur **tout** l'intervalle I . L'ensemble des solutions de $Y' = A(t)Y$ est un espace vectoriel de dimension n , et celui de l'équation complète est un espace affine dirigé par lui.

Il n'y a donc jamais d'explosion pour un système linéaire : $f(t, Y) = A(t)Y + B(t)$ est lipschitzienne en Y , de constante $\sup \|A\|$ sur un segment. Une **base de solutions** $Y_1, \dots, Y_n$ forme une matrice fondamentale, et leur déterminant (le wronskien) ne s'annule jamais ou est identiquement nul.

6. Exponentielle de matrice

D Exponentielle d'une matrice

Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, la série $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ converge normalement sur tout compact. La fonction $t \mapsto e^{tA}$ est de classe C^∞ et $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$.

P Propriétés

$e^{(s+t)A} = e^{sA} e^{tA}$; $e^{A+B} = e^A e^B$ si $AB = BA$; $e^{PAP^{-1}} = P e^A P^{-1}$;
 $\det(e^A) = e^{\text{tr} A}$. La solution de $Y' = AY$, $Y(0) = Y_0$ est $Y(t) = e^{tA} Y_0$, et celle de $Y' = AY + B(t)$ est donnée par la **formule de Duhamel**
$$Y(t) = e^{tA} Y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} B(s) ds.$$

M Calculer e^{tA}

1. Si $A = PDP^{-1}$ est diagonalisable : $e^{tA} = P \text{diag}(e^{\lambda_i t}) P^{-1}$.
2. Si $A = \lambda I + N$ avec N nilpotente, I et N commutent :
$$e^{tA} = e^{\lambda t} \left(I + tN + \cdots + \frac{t^{p-1} N^{p-1}}{(p-1)!} \right).$$
3. Dans le cas général, on décompose $A = D + N$ (Dunford, D diagonalisable, N nilpotente, $DN = ND$) et on applique les deux cas précédents.

E Exemple 3 : matrice diagonalisable

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, le polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$.

Les vecteurs propres sont $(1, 1)$ pour 3 et $(1, -1)$ pour -1 . Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, on trouve

$$e^{tA} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t} + e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} + e^{-t} \end{pmatrix}.$$

E Exemple 4 : matrice non diagonalisable

Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^2 = 0$, on a

$e^{tA} = e^{2t}(I + tN) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La solution de condition initiale $(0, 1)$ est $Y(t) = e^{2t}(t, 1)$.

7. Stabilité

D Équilibre stable

Un point y^* tel que $f(y^*) = 0$ est un **équilibre** de $y' = f(y)$. Il est **stable** si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|y(0) - y^*\| < \delta$ entraîne $\|y(t) - y^*\| < \varepsilon$ pour tout $t \geq 0$. Il est **asymptotiquement stable** s'il est stable et si $y(t) \rightarrow y^*$ pour les données initiales proches.

P

Stabilité linéaire et linéarisation

Pour $Y' = AY$, l'origine est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres ont une partie réelle < 0 ; elle est stable si et seulement si elles sont de partie réelle ≤ 0 , celles de partie réelle nulle étant semi-simples (blocs de Jordan de taille 1). Pour $y' = f(y)$ avec f de classe C^1 et $f(y^*) = 0$: si toutes les valeurs propres de $Df(y^*)$ sont de partie réelle < 0 , y^* est asymptotiquement stable ; si l'une est de partie réelle > 0 , y^* est instable.

E

Exemple 5 : linéarisation

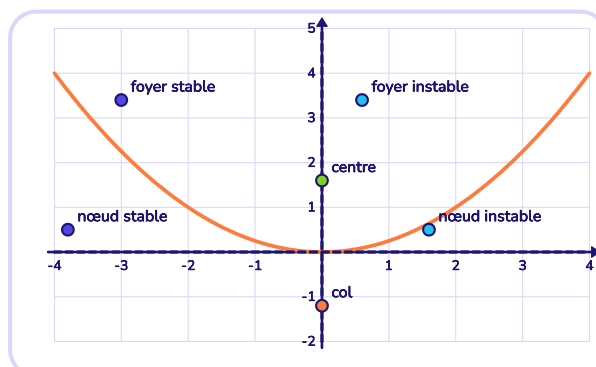
Pour $x' = x(1 - x)$, les équilibres sont 0 et 1. Comme $f'(x) = 1 - 2x$, on a $f'(0) = 1 > 0$ (instable) et $f'(1) = -1 < 0$ (asymptotiquement stable).

Si l'on dispose d'une fonction de Lyapunov $V \geq 0$, nulle seulement en y^* , telle que

$\frac{d}{dt}V(y(t)) \leq 0$, l'équilibre est stable ; si l'inégalité est stricte hors de y^* , il est asymptotiquement stable.

8. Portraits de phase

Pour un système plan $Y' = AY$ avec $\det A \neq 0$, notons $T = \text{tr } A$, $D = \det A$ et $\Delta = T^2 - 4D$. Les valeurs propres sont racines de $\lambda^2 - T\lambda + D$.



Cas	Valeurs propres	Nature de l'origine
$D < 0$	réelles, de signes opposés	col, instable
$D > 0, \Delta \geq 0, T < 0$	réelles négatives	nœud stable (asymptotiquement)
$D > 0, \Delta \geq 0, T > 0$	réelles positives	nœud instable
$\Delta < 0, T \neq 0$	complexes conjuguées	foyer, stable si $T < 0$
$\Delta < 0, T = 0$	imaginaires pures	centre (stable, non asymptotique)



équations différentielles Licence L3 : portraits de phase d'un système linéaire plan, nœud stable, col, foyer stable et centre, avec trajectoires fléchées



Astuce de Zyro

Quand je dois classer un point d'équilibre, je ne cherche pas les valeurs propres tout de suite : je calcule la trace et le déterminant, je regarde sur le plan ci-dessus dans quelle zone je tombe, et la nature du point est connue en deux lignes.



Quand la linéarisation ne tranche pas

Si $Df(y^*)$ a une valeur propre de partie réelle nulle (par exemple un centre), le système non linéaire peut être stable, instable ou asymptotiquement stable : il faut une autre méthode, comme une fonction de Lyapunov.

À retenir

- **Cauchy-Lipschitz** : f continue et localement lipschitzienne en y donne existence et unicité de la solution maximale ; sans caractère lipschitzien, l'unicité peut tomber ($y' = 3y^{2/3}$).
- Une solution maximale sort de tout compact ; elle peut **exploser en temps fini** ($y' = y^2$). Un système linéaire est toujours global.
- **Gronwall** : $u \leq a + L \int_0^t u$ implique $u \leq a e^{Lt}$; il fournit l'unicité et la dépendance continue.
- $Y' = AY$ a pour solution $e^{tA}Y_0$; avec second membre, on utilise la formule de Duhamel.
- e^{tA} se calcule par diagonalisation ou par la décomposition $\lambda I + N$; $\det e^A = e^{\text{tr} A}$.
- **Stabilité** : toutes les valeurs propres de partie réelle < 0 donnent un équilibre asymptotiquement stable ; une valeur propre de partie réelle > 0 le rend instable.
- En dimension 2, la trace et le déterminant classent l'origine : col, nœud, foyer, centre.

Le livre de cours de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 101 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

 Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Équations différentielles : exercices de maths Licence L3

 Contrôles de maths

Équations différentielles : contrôle de maths Licence L3

 QCM de maths

Équations différentielles : QCM de maths Licence L3

 Exercices de maths

Fonctions holomorphes : exercices de maths Licence L3

 Exercices de maths

 Contrôles de maths

Singularités et théorème des résidus :
exercices de maths Licence L3

Fonctions holomorphes : contrôle de
maths Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage