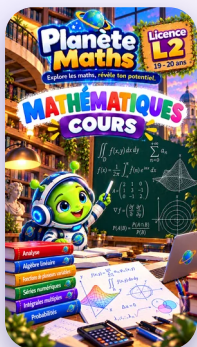


Équations différentielles : cours de maths Licence L2 à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 100 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Une population qui croît puis se stabilise, un ressort qui oscille en perdant de l'énergie, deux réservoirs qui échangent un produit : dans tous ces phénomènes, on ne connaît pas directement la grandeur étudiée, mais une **relation entre elle et ses variations**. Ce chapitre apprend à traduire une telle relation en équation, à la résoudre quand elle est linéaire, à garantir l'existence et l'unicité des solutions, puis à décrire leur comportement à long terme.

1. Vocabulaire et problème de Cauchy

D Équation différentielle

Une équation différentielle d'ordre n est une relation $F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ dont l'inconnue est une fonction y de la variable t , dérivable n fois sur un intervalle I . Une **solution** est une fonction qui vérifie la relation en tout point de I . L'équation est dite **linéaire** si l'inconnue et ses dérivées n'apparaissent qu'au premier degré.

D Problème de Cauchy

C'est une équation différentielle accompagnée de **conditions initiales** en un instant t_0 : $y(t_0)$ pour l'ordre 1, $y(t_0)$ et $y'(t_0)$ pour l'ordre 2. On cherche la solution qui les satisfait.

E Exemple

L'équation $y' = -2y$ est linéaire d'ordre 1. Pour tout réel C , la fonction $y(t) = C e^{-2t}$ est solution, car $y'(t) = -2C e^{-2t} = -2y(t)$. La condition $y(0) = 5$ impose $C = 5$: le problème de Cauchy a ici une seule solution.

2. Équations linéaires d'ordre 1

On considère $(E) : y' + a(t)y = b(t)$, où a et b sont continues sur un intervalle I . L'équation homogène associée est $(H) : y' + a(t)y = 0$.

P**Structure des solutions**

Soit A une primitive de a sur I . Les solutions de (H) sont les fonctions $t \mapsto C e^{-A(t)}$, $C \in \mathbb{R}$. Si y_p est une solution particulière de (E) , les solutions de (E) sont les fonctions $y_p + C e^{-A}$. Pour tout (t_0, y_0) avec $t_0 \in I$, le problème de Cauchy $y(t_0) = y_0$ admet une unique solution sur I tout entier.

M**Variation de la constante**

1. Résoudre l'équation homogène : $y_h = C e^{-A(t)}$.
2. Chercher y sous la forme $y = C(t) e^{-A(t)}$.
3. Reporter dans (E) : il reste $C'(t) e^{-A(t)} = b(t)$, donc $C'(t) = b(t) e^{A(t)}$.
4. Intégrer pour obtenir $C(t)$, puis conclure avec la condition initiale éventuelle.

E**Exemple**

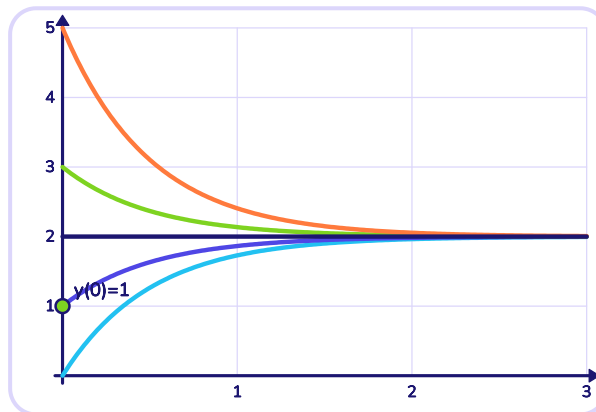
Réolvons $y' - 3y = 4e^t$. L'homogène donne $y_h = C e^{3t}$. On pose $y = C(t) e^{3t}$: $C'(t) e^{3t} = 4e^t$, donc $C'(t) = 4e^{-2t}$ et $C(t) = -2e^{-2t} + K$. Ainsi $y(t) = -2e^t + K e^{3t}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

E

Exemple

Sur $]0; +\infty[$, résolvons $ty' + y = t$ avec $y(1) = 3$. On divise par t : $y' + \frac{1}{t}y = 1$.

Une primitive de $1/t$ est $\ln t$, donc $y_h = \frac{C}{t}$. La fonction $y_p(t) = \frac{t}{2}$ convient, car $t \cdot \frac{1}{2} + \frac{t}{2} = t$. Les solutions sont $y(t) = \frac{t}{2} + \frac{C}{t}$. Alors $y(1) = \frac{1}{2} + C = 3$ donne $C = \frac{5}{2}$, et $y(t) = \frac{t}{2} + \frac{5}{2t}$.



La figure ci-dessus montre toutes les solutions de $y' + 2y = 4$: ce sont les courbes $y = 2 + Ce^{-2t}$. Elles ne se coupent jamais, et elles s'approchent toutes de la solution constante $y = 2$ quand t grandit.

3. Équations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

On étudie $(E_2) : y'' + ay' + by = f(t)$, avec a, b réels et f continue. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$ est un espace vectoriel réel de **dimension 2**. On le décrit grâce à l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$, de discriminant $\Delta = a^2 - 4b$.

Discriminant	Racines	Solutions réelles de l'homogène
$\Delta > 0$	$r_1 \neq r_2$ réelles	$Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$
$\Delta = 0$	r_0 double	$(A + Bt) e^{r_0 t}$
$\Delta < 0$	$\alpha \pm i\beta$	$e^{\alpha t} (A \cos \beta t + B \sin \beta t)$

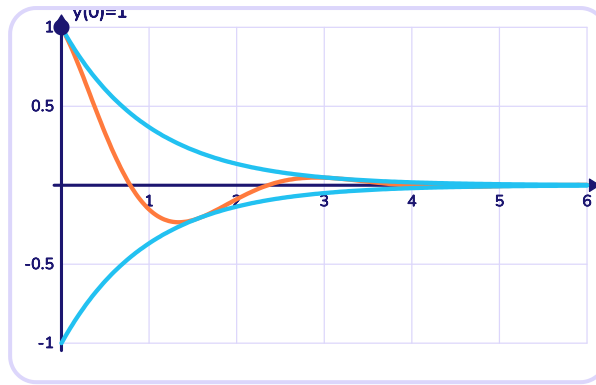
Pour le second membre, on cherche une solution particulière de même forme que f (polynôme, exponentielle, sinus ou cosinus) ; si cette forme est déjà solution de l'homogène, on la multiplie par t : c'est le phénomène de **résonance**. La solution générale est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'homogène, et le problème de Cauchy $(y(t_0), y'(t_0))$ a une unique solution.

E Exemple

Réolvons $y'' - 3y' + 2y = 4t$. L'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = (r - 1)(r - 2)$ a pour racines **1** et **2**. On cherche $y_p = \alpha t + \beta$: $-3\alpha + 2\alpha t + 2\beta = 4t$, donc $\alpha = 2$ et $\beta = 3$. Les solutions sont $y(t) = Ae^t + Be^{2t} + 2t + 3$.

E Exemple

Pour $y'' + 2y' + 5y = 0$, on a $r^2 + 2r + 5 = 0$, $\Delta = -16$, et les racines sont $-1 \pm 2i$. Les solutions sont $y(t) = e^{-t}(A \cos 2t + B \sin 2t)$. Avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$, on trouve $A = 1$ puis $-A + 2B = -1$, donc $B = 0$ et $y(t) = e^{-t} \cos 2t$: une oscillation amortie.



4. Systèmes différentiels linéaires et exponentielle de matrice

Un système $X' = AX$, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X(t) \in \mathbb{R}^n$, se résout grâce à l'exponentielle de matrice. Toute équation d'ordre 2 se ramène à ce cadre : en posant $X = (y, y')$, l'équation $y'' + ay' + by = 0$ devient $X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} X$.

D Exponentielle de matrice

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$. La série converge pour toute matrice.

P Propriétés

(i) $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$. (ii) Si $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^A e^B$. (iii) Si $A = PDP^{-1}$, alors $e^{tA} = P e^{tD} P^{-1}$, et e^{tD} est diagonale quand D l'est. (iv) La solution du problème de Cauchy $X' = AX$, $X(0) = X_0$ est $X(t) = e^{tA} X_0$, unique et définie sur $\mathbb{R}$.

E**Exemple**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Ses valeurs propres sont **3** (vecteur propre $(1, 1)$) et **-1** (vecteur propre $(1, -1)$). Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \text{diag}(3, -1)$, on obtient

$$e^{tA} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t} + e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} + e^{-t} \end{pmatrix}.$$

E**Exemple**

Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, on écrit $A = 2I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = 0$. Comme $2I$ et N commutent, $e^{tA} = e^{2t}(I + tN) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

!**Astuce de Zyro**

Sur ma planète, on vérifie toujours une solution en la dérivant : si $X'(t) = AX(t)$ après calcul, c'est gagné, et aucun théorème n'est nécessaire pour s'en convaincre.

5. Théorème de Cauchy-Lipschitz

Pour une équation non linéaire $y' = f(t, y)$, l'existence et l'unicité ne sont plus automatiques.

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit f continue sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Alors, pour tout $(t_0, y_0) \in U$, le problème de Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ admet une **unique solution maximale** $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, J intervalle ouvert contenant t_0 , et toute solution est une restriction de celle-ci.

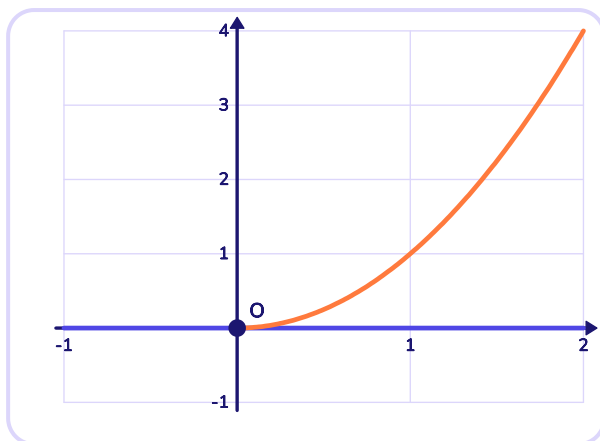
Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est localement lipschitzienne : le théorème s'applique donc dès que f est $\mathcal{C}^1$. Conséquence géométrique : **deux courbes intégrales distinctes ne se croisent jamais**. Pour les équations linéaires à coefficients continus, la solution est définie sur l'intervalle tout entier. Dans le cas non linéaire, elle peut cesser d'exister en temps fini.

Exemple

L'équation $y' = y^2$ avec $y(0) = 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$. La fonction $y(t) = \frac{1}{1-t}$ est solution sur $] -\infty ; 1[$, et elle tend vers $+\infty$ en 1^- : la solution maximale « explose » en temps fini.

Piège

Si f n'est pas lipschitzienne, l'unicité peut tomber. Pour $y' = 2\sqrt{|y|}$ avec $y(0) = 0$, la fonction nulle et la fonction $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$ (prolongée par 0 sur $\mathbb{R}_-$) sont deux solutions distinctes, car $\sqrt{|y|}$ n'est pas lipschitzienne en 0.



6. Équations non linéaires à variables séparables

M Séparer les variables

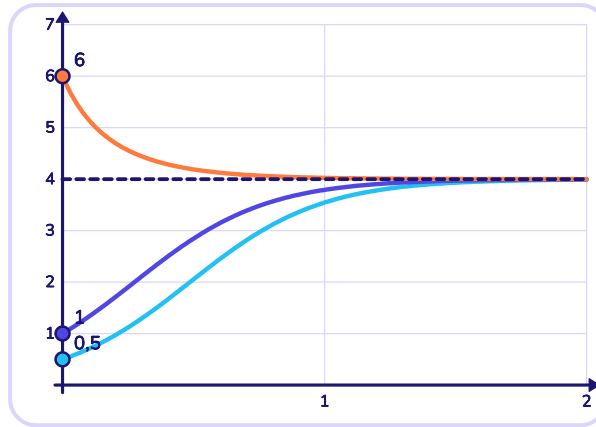
1. Écrire $y' = g(t) h(y)$.
2. Repérer les équilibres : ce sont les constantes y^* telles que $h(y^*) = 0$.
3. Là où $h(y) \neq 0$, écrire $\frac{y'}{h(y)} = g(t)$, puis intégrer : $H(y) = G(t) + K$, avec $H' = 1/h$ et $G' = g$.
4. Isoler y si possible, utiliser la condition initiale et préciser l'intervalle maximal.

E Exemple

Réolvons $y' = y(4 - y)$ avec $y(0) = 1$. Les équilibres sont 0 et 4. Pour $0 < y < 4$, on décompose $\frac{1}{y(4 - y)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{4 - y} \right)$, d'où $\frac{1}{4} \ln \frac{y}{4 - y} = t + K$, soit $\frac{y}{4 - y} = Ce^{4t}$. Avec $y(0) = 1$ on a $C = \frac{1}{3}$, et

$$y(t) = \frac{4}{1 + 3e^{-4t}}.$$

Cette solution croît de 1 vers 4 : c'est le modèle logistique, défini sur $\mathbb{R}$.



7. Stabilité et portrait de phase

Une équation **autonome** $y' = f(y)$ ne dépend pas explicitement du temps. Un **équilibre** est un réel y^* tel que $f(y^*) = 0$: la fonction constante y^* est alors solution.

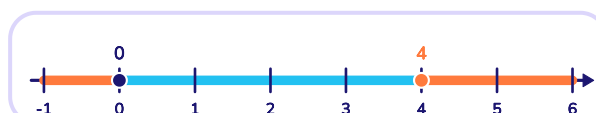
D Stabilité

Un équilibre y^* est **stable** si les solutions qui démarrent près de y^* restent près de y^* pour tout $t \geq 0$, **asymptotiquement stable** si, de plus, elles convergent vers y^* , et **instable** sinon.

P Critère de linéarisation

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f(y^*) = 0$: si $f'(y^*) < 0$, l'équilibre est asymptotiquement stable ; si $f'(y^*) > 0$, il est instable. Pour $f'(y^*) = 0$, il faut étudier le signe de f autour de y^* .

Pour $y' = y(4 - y)$, on a $f'(y) = 4 - 2y$: $f'(0) = 4 > 0$, donc **0** est instable, et $f'(4) = -4 < 0$, donc **4** est stable. La droite de phase résume tout : les solutions montent sur $]0; 4[$ et descendent hors de cet intervalle.



Pour un système linéaire plan $X' = AX$ avec $\det A \neq 0$, l'origine est l'unique équilibre et sa nature se lit sur les valeurs propres, ou sur la trace T et le déterminant D de A .

Valeurs propres	Nature de l'origine	Stabilité
réelles, toutes deux négatives	nœud	asymptotiquement stable
réelles, toutes deux positives	nœud	instable
réelles de signes opposés ($D < 0$)	col	instable
complexes, partie réelle < 0	foyer	asymptotiquement stable
complexes, partie réelle > 0	foyer	instable
imaginaires pures $\pm i\beta$	centre	stable, non asymptotiquement



Équations différentielles Licence L2 : quatre portraits de phase de systèmes linéaires plans, col, nœud stable, foyer stable et centre, avec les trajectoires fléchées autour de l'origine

E**Exemple**

Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, on a $T = -3$ et $D = 2$, donc $T^2 - 4D = 1 > 0$: valeurs propres réelles -1 et -2 , toutes deux négatives. L'origine est un nœud asymptotiquement stable.

À retenir

- Ordre 1 linéaire : solutions $y_p + C e^{-A(t)}$, variation de la constante, et une seule solution pour chaque condition initiale.
- Ordre 2 à coefficients constants : l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ donne trois formes (racines réelles distinctes, double, complexes).
- Systèmes linéaires : $X' = AX$ a pour solution $X(t) = e^{tA} X_0$; on calcule e^{tA} par diagonalisation ou par décomposition $\lambda I + N$.
- Cauchy-Lipschitz : f localement lipschitzienne en y donne existence et unicité de la solution maximale, qui peut exploser en temps fini.
- Variables séparables : équilibres d'abord, puis intégration de $y'/h(y) = g(t)$.
- Stabilité : signe de $f'(y^*)$ en dimension 1, valeurs propres (ou T et D) pour un système plan.

Le livre de cours de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 100 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)



Entraîne-toi : défi express de Licence L2

[Changer de niveau](#)

Niveau : Licence L2

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi



Zyro te conseille la suite



Exercices de maths

Équations différentielles : exercices de maths Licence L2



Contrôles de maths

Équations différentielles : contrôle de maths Licence L2



QCM de maths



Exercices de maths

Équations différentielles : QCM de maths
Licence L2

Probabilités sur un univers dénombrable
: exercices de maths Licence L2



Exercices de maths

Espaces vectoriels et applications
linéaires : exercices de maths Licence L2



Contrôles de maths

Probabilités sur un univers dénombrable
: contrôle de maths Licence L2

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage