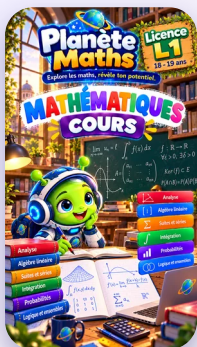


Équations différentielles linéaires : cours de maths Licence L1 à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 99 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Une équation différentielle relie une fonction inconnue à ses dérivées. Elle décrit le refroidissement d'une tasse, la charge d'un condensateur, le mouvement d'une masse au bout d'un ressort : dès qu'une vitesse de variation dépend de l'état présent, une telle équation apparaît. En première année, on maîtrise deux familles : les équations linéaires d'ordre 1 et les équations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.

1. Équation linéaire d'ordre 1 sans second membre

D Équation linéaire d'ordre 1

Soit I un intervalle et a, b deux fonctions continues sur I . L'équation $(E) : y' + a(x)y = b(x)$ d'inconnue y dérivable sur I est une équation différentielle linéaire d'ordre 1. L'équation homogène associée est $(H) : y' + a(x)y = 0$.

P Solutions de l'équation homogène

Si A est une primitive de a sur I , les solutions de (H) sont les fonctions $y(x) = C e^{-A(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Preuve : $(y e^A)' = (y' + ay) e^A$. Donc y est solution de (H) si et seulement si $y e^A$ a une dérivée nulle sur l'intervalle I , c'est-à-dire est constante.

E Exemple 1

Pour $y' + 2x y = 0$ sur $\mathbb{R}$, $A(x) = x^2$ et les solutions sont $y(x) = C e^{-x^2}$. Pour $y' - 3y = 0$, $a = -3$, $A(x) = -3x$ et $y(x) = C e^{3x}$.

2. Second membre et variation de la constante

P

Structure des solutions

Si y_p est une solution particulière de (E) , les solutions de (E) sont exactement les fonctions $y_p + y_h$ où y_h décrit les solutions de (H) . Les courbes forment une « famille » dépendant d'une constante.

M

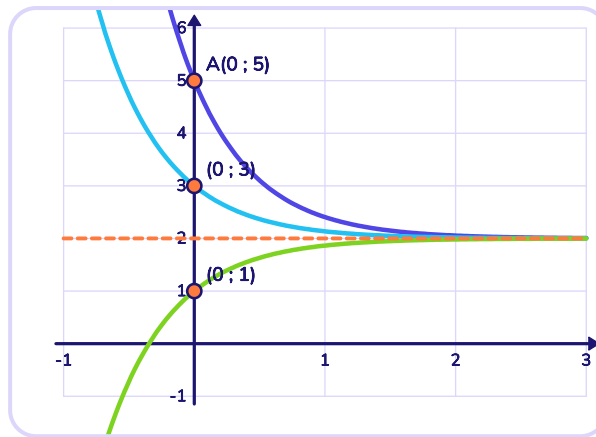
Variation de la constante

1. Mettre l'équation sous la forme $y' + a(x)y = b(x)$ (coefficient de y' égal à 1) sur un intervalle où a et b sont continues.
2. Résoudre (H) : $y_h = C e^{-A(x)}$.
3. Chercher $y(x) = C(x) e^{-A(x)}$, où C est maintenant une fonction. On obtient $C'(x) e^{-A(x)} = b(x)$, donc $C'(x) = b(x) e^{A(x)}$.
4. Primitiver C' (avec une constante K) et conclure.

E

Exemple 2 : coefficient constant

Réolvons $y' + 2y = 4$. L'équation homogène donne $y_h = C e^{-2x}$. On pose $y = C(x)e^{-2x}$: $C'(x)e^{-2x} = 4$, donc $C'(x) = 4e^{2x}$ et $C(x) = 2e^{2x} + K$. Ainsi $y(x) = 2 + K e^{-2x}$, $K \in \mathbb{R}$. La constante 2 est une solution particulière évidente, que l'on aurait pu deviner.



E Exemple 3 : coefficient variable

Réolvons $xy' + y = x^2$ sur $]0, +\infty[$. On divise par x : $y' + \frac{1}{x}y = x$. Une primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln x$, donc $y_h = \frac{C}{x}$. On pose $y = \frac{C(x)}{x}$: $\frac{C'(x)}{x} = x$, donc $C'(x) = x^2$ et $C(x) = \frac{x^3}{3} + K$. Les solutions sont $y(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{K}{x}$.



Erreur classique

Oublier de diviser par le coefficient de y' avant d'appliquer la formule, ou résoudre sur un intervalle où ce coefficient s'annule : sur $\mathbb{R}$ tout entier, l'équation de l'exemple 3 se traite autrement. Précisez toujours l'intervalle de résolution.

3. Problème de Cauchy d'ordre 1



Existence et unicité

Pour tout $x_0 \in I$ et tout réel y_0 , l'équation (E) admet une unique solution sur I vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

En effet, la solution générale s'écrit $y_p(x) + C e^{-A(x)}$ et la condition $y(x_0) = y_0$ fournit $C = (y_0 - y_p(x_0)) e^{A(x_0)}$: une seule valeur de C . Géométriquement, par chaque point du plan d'abscisse dans I passe une et une seule courbe intégrale.

E Exemple 4

Pour $y' + 2y = 4$ avec $y(0) = 5$: $2 + K = 5$, donc $K = 3$ et $y(x) = 2 + 3e^{-2x}$.
C'est la courbe violette de la figure ci-dessus.

4. Ordre 2 à coefficients constants sans second membre

D Équation d'ordre 2

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et f continue. L'équation $(E_2) : y'' + a y' + b y = f(x)$ est linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Son équation caractéristique est $r^2 + ar + b = 0$, de discriminant $\Delta = a^2 - 4b$.

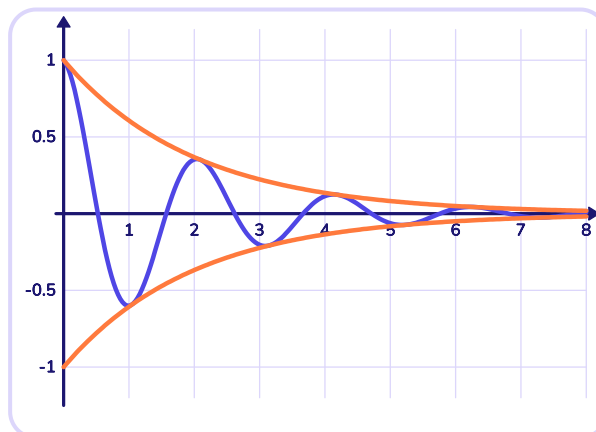
P Solutions de l'équation homogène

L'ensemble des solutions réelles de $y'' + a y' + b y = 0$ est un plan vectoriel (deux constantes libres), décrit par le tableau suivant.

Signe de $\Delta = a^2 - 4b$	Racines de $r^2 + ar + b = 0$	Solutions réelles de l'équation homogène
$\Delta > 0$	$r_1 \neq r_2$ réelles	$\lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$
$\Delta = 0$	r_0 racine double	$(\lambda + \mu x) e^{r_0 x}$
$\Delta < 0$	$\alpha \pm i\beta$ complexes conjuguées	$e^{\alpha x} (\lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x)$

E Exemple 5

$y'' - 3y' + 2y = 0 : r^2 - 3r + 2 = (r - 1)(r - 2)$, donc $y = \lambda e^x + \mu e^{2x}$. Pour
 $y'' + 4y' + 4y = 0$: racine double -2 , donc $y = (\lambda + \mu x) e^{-2x}$. Pour
 $y'' + y' + \frac{37}{4}y = 0 : \Delta = -36$, racines $-\frac{1}{2} \pm 3i$, donc
 $y = e^{-x/2} (\lambda \cos 3x + \mu \sin 3x)$, solution amortie représentée ci-dessous pour
 $\lambda = 1, \mu = 0$.



5. Second membre

La structure est la même qu'en ordre 1 : solution générale = solution particulière + solution générale de l'équation homogène. De plus, si y_1 résout l'équation de second membre f_1 et y_2

celle de second membre f_2 , alors $y_1 + y_2$ résout celle de second membre $f_1 + f_2$ (principe de superposition).

M

Trouver une solution particulière

Si $f(x) = P(x)e^{mx}$ avec P polynôme, on cherche y_p de la forme suivante, puis on identifie les coefficients :

Second membre $f(x)$

Forme cherchée pour y_p

$P(x)e^{mx}$, m **non racine caractéristique**

$Q(x)e^{mx}$, $\deg Q = \deg P$

$P(x)e^{mx}$, m **racine simple**

$xQ(x)e^{mx}$, $\deg Q = \deg P$

$P(x)e^{mx}$, m **racine double**

$x^2Q(x)e^{mx}$,
 $\deg Q = \deg P$

E

Exemple 6

$y'' + 2y' + 5y = 10x + 4$: $m = 0$ n'est pas racine de $r^2 + 2r + 5$. On cherche $y_p = \alpha x + \beta$: $2\alpha + 5\alpha x + 5\beta = 10x + 4$, d'où $\alpha = 2$ et $\beta = 0$, $y_p = 2x$. De même, pour $y'' - 3y' + 2y = e^x$, $m = 1$ est racine simple : on pose $y_p = cxe^x$, ce qui donne $-ce^x = e^x$, donc $y_p = -xe^x$.



Astuce de Zyro

Sur ma planète, on ne rend jamais une solution sans l'avoir remise dans l'équation : une minute de vérification évite une erreur de signe sur toute la copie !

6. Problème de Cauchy d'ordre 2



Existence et unicité

Pour tout x_0 et tous réels y_0, y_1 , l'équation (E_2) admet une unique solution vérifiant $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$.



Exemple 7

$y'' + 4y' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$. Avec $y = (\lambda + \mu x)e^{-2x}$: $y(0) = \lambda = 1$ et $y'(x) = (\mu - 2\lambda - 2\mu x)e^{-2x}$, donc $y'(0) = \mu - 2 = 0$. Ainsi $y(x) = (1 + 2x)e^{-2x}$.

7. Solutions complexes

Comme a et b sont réels, on peut chercher des solutions à valeurs complexes. La fonction $x \mapsto e^{rx}$, avec $r \in \mathbb{C}$, est solution de l'équation homogène si et seulement si r est racine de l'équation caractéristique. Pour $r = \alpha \pm i\beta$, les parties réelle et imaginaire de $e^{(\alpha+i\beta)x}$ donnent $e^{\alpha x} \cos \beta x$ et $e^{\alpha x} \sin \beta x$: c'est l'origine du troisième cas du tableau.

M

Second membre trigonométrique

Pour $f(x) = \cos \omega x$ (respectivement $\sin \omega x$), on résout $y'' + ay' + by = e^{i\omega x}$ et on prend la partie réelle (respectivement imaginaire) d'une solution. Si $i\omega$ n'est pas racine, $y_c(x) = \frac{e^{i\omega x}}{P(i\omega)}$ avec $P(r) = r^2 + ar + b$.

E

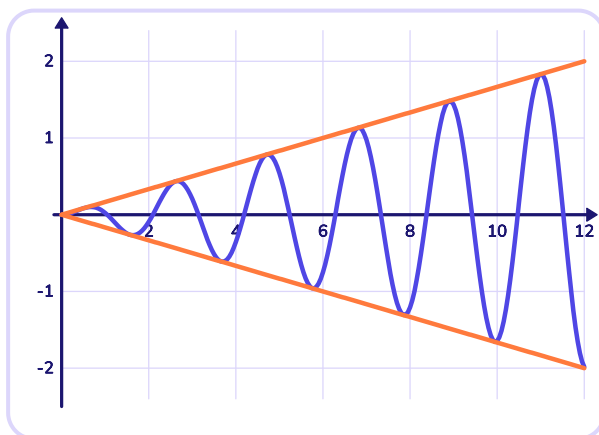
Exemple 8

$y'' + 2y' + 5y = \cos 2x$: $P(2i) = -4 + 4i + 5 = 1 + 4i$, donc $y_c = \frac{(1 - 4i)e^{2ix}}{17}$
 et, en prenant la partie réelle, $y_p(x) = \frac{\cos 2x + 4 \sin 2x}{17}$.

E

Exemple 9 : résonance

Pour $y'' + 9y = \cos 3x$, $3i$ est racine de $r^2 + 9$: on cherche $y_p = cx e^{3ix}$, ce qui conduit à $y_p(x) = \frac{x \sin 3x}{6}$. L'amplitude croît linéairement avec x , comme le montre la figure.





Erreur classique

Chercher $y_p = c e^{mx}$ alors que m est racine caractéristique : l'identification donne $0 = 1$. Quand ce cas se produit, multipliez par x (ou x^2 pour une racine double).

À retenir

- Ordre 1 : $y' + ay = 0$ a pour solutions $C e^{-A(x)}$; avec second membre, on ajoute une solution particulière, trouvée par variation de la constante.
- Problème de Cauchy : une condition initiale (ordre 1) ou deux (ordre 2) donnent une unique solution.
- Ordre 2 : on résout l'équation caractéristique ; trois cas selon le signe de Δ .
- Second membre $P(x)e^{mx}$: forme de y_p selon que m est racine caractéristique ou non ; superposition pour les sommes.
- Complexes : $\cos \omega x = \operatorname{Re} e^{i\omega x}$, et les racines $\alpha \pm i\beta$ donnent les solutions $e^{\alpha x} \cos \beta x$ et $e^{\alpha x} \sin \beta x$.
- Toujours vérifier la solution trouvée dans l'équation de départ et la condition initiale.

Le livre de cours de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 99 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)



Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Équations différentielles linéaires :
exercices de maths Licence L1

 Contrôles de maths

Équations différentielles linéaires :
contrôle de maths Licence L1

 QCM de maths

Équations différentielles linéaires : QCM
de maths Licence L1

 Exercices de maths

Complexes et polynômes : exercices de
maths Licence L1

 Exercices de maths

Arithmétique et structures : exercices de
maths Licence L1

 Contrôles de maths

Complexes et polynômes : contrôle de
maths Licence L1

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage