

Équations différentielles linéaires : exercices corrigés de maths Maths Spé à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Vrai ou faux autour de Cauchy



- a. Vrai : $X \mapsto X(0)$ est un isomorphisme de l'espace des solutions sur $\mathbb{R}^3$ d'après Cauchy.
- b. Faux : $(X_1 + X_2)' = A(X_1 + X_2) + 2B \neq A(X_1 + X_2) + B$ si $B \neq 0$.
- c. Vrai : $(X_1 - X_2)' = A(X_1 - X_2) + B - B = A(X_1 - X_2)$.
- d. Faux : si $X(t_0) = 0$, la solution nulle vérifie le même problème de Cauchy ; par unicité, $X = 0$.

2 Exponentielle d'une matrice diagonale



$A^k = \text{diag}(2^k, (-3)^k)$, donc $e^{tA} = \text{diag}(e^{2t}, e^{-3t})$.

$$X(t) = e^{tA}X(0) = (4e^{2t}, 5e^{-3t}).$$

Vérification : $x' = 8e^{2t} = 2x$ et $y' = -15e^{-3t} = -3y$.

3 Une matrice nilpotente



a. $A^2 = 0$, donc la série s'arrête : $e^{tA} = I + tA = \begin{pmatrix} 1 & 3t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b. $X(t) = e^{tA}(1, 2) = (1 + 6t, 2)$. Vérification : $x' = 6 = 3y$ et $y' = 0$.

4 Équation d'ordre 2 : deux racines réelles



Équation caractéristique $r^2 - 5r + 6 = (r - 2)(r - 3) = 0$, donc $y = ae^{2t} + be^{3t}$.

$$y(0) = a + b = 1 \text{ et } y'(0) = 2a + 3b = 0 : b = -2, a = 3.$$

$$y(t) = 3e^{2t} - 2e^{3t}.$$

5 Oscillateur harmonique



Les racines sont $\pm 3i$: $y = a \cos 3t + b \sin 3t$. $y(0) = a = 2$; $y'(0) = 3b = 6$, donc $b = 2$.

$$y = 2 \cos 3t + 2 \sin 3t = 2\sqrt{2} \cos(3t - \pi/4). \text{ L'amplitude est } 2\sqrt{2}.$$

6 Calculs de Wronskiens



a. $W = \cos 2t \cdot 2 \cos 2t - (-2 \sin 2t) \sin 2t = 2$. Non nul : base de $y'' + 4y = 0$.

b. $W = e^t(-e^{-t}) - e^t e^{-t} = -2$. Non nul : base de $y'' - y = 0$.

7 Équation du premier ordre avec second membre



Homogène : $y = Ce^{2t}$. On pose $y_p = at + b$: $a = 2at + 2b + 4t$, donc $2a + 4 = 0$ et $a = 2b$: $a = -2$, $b = -1$.

$y(t) = -2t - 1 + Ce^{2t}$. Vérification : $y' = -2 + 2Ce^{2t}$ et $2y + 4t = -2 + 2Ce^{2t}$.

8 Un système de dimension 2



$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 2)(\lambda - 5)$.

Pour 5 : $(A - 5I)v = 0$ donne $v_1 = (1, 1)$. Pour 2 : $v_2 = (1, -2)$.

$X = c_1 e^{5t}(1, 1) + c_2 e^{2t}(1, -2)$. Condition initiale : $c_1 + c_2 = 1$, $c_1 - 2c_2 = 4$, donc $c_2 = -1$, $c_1 = 2$.

$X(t) = (2e^{5t} - e^{2t}, 2e^{5t} + 2e^{2t})$. Contrôle : $x'(0) = 8 = 4 \cdot 1 + 4$.

9 Rotation dans le plan



a. $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J^2 = -I$. En séparant les puissances paires et impaires,

$$e^{tA} = \cos(2t)I + \sin(2t)J = \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}.$$

b. $X(t) = (3 \cos 2t, 3 \sin 2t)$. Ainsi $x^2 + y^2 = 9$. Directement :

$(x^2 + y^2)' = 2x(-2y) + 2y(2x) = 0$: la trajectoire est un cercle de rayon 3.

10 Racines complexes avec amortissement



Racines $-1 \pm 2i$: $y = e^{-t}(a \cos 2t + b \sin 2t)$. $y(0) = a = 1$.

$y' = e^{-t}((-a + 2b) \cos 2t + (-b - 2a) \sin 2t)$, donc $y'(0) = -a + 2b = 0$, $b = \frac{1}{2}$.

$y(t) = e^{-t}(\cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t)$.

11 Racine double et second membre



a. $y'_p = (t + t^2)e^{2t}$, $y''_p = (1 + 4t + 2t^2)e^{2t}$. Alors

$$y''_p - 4y'_p + 4y_p = e^{2t}(1 + 4t + 2t^2 - 4t - 4t^2 + 2t^2) = e^{2t}.$$

b. L'homogène a une racine double 2 : $y = (c_1 + c_2t + \frac{t^2}{2})e^{2t}$. $y(0) = c_1 = 1$;

$$y'(0) = c_2 + 2c_1 = 0, \text{ donc } c_2 = -2. y(t) = (1 - 2t + \frac{t^2}{2})e^{2t}.$$

12 Formule d'Abel



a. Racines de $r^2 + 3r + 2 = (r + 1)(r + 2)$: -1 et -2 .

$$W = e^{-t}(-2e^{-2t}) - (-e^{-t})e^{-2t} = -e^{-3t}.$$

b. $W' = 3e^{-3t} = -3W$, conforme à Abel ($a = 3$). W ne s'annule jamais : (e^{-t}, e^{-2t}) est une base de S_H .

13 Stabilité de deux systèmes



A_1 est triangulaire : valeurs propres -1 et -2 , toutes deux négatives. Toute solution tend vers 0 (stabilité asymptotique).

A_2 : trace 0 , déterminant $-1 + 4 = 3$, donc $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 3$, valeurs propres $\pm i\sqrt{3}$ distinctes. Les solutions sont périodiques de période $2\pi/\sqrt{3}$ et ne tendent pas vers 0 (sauf la solution nulle) : c'est un centre.

14 Exponentielle d'un projecteur



$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A, \text{ donc } A^k = A \text{ pour } k \geq 1.$$

$$e^{tA} = I + \sum_{k \geq 1} \frac{t^k}{k!} A = I + (e^t - 1)A = \begin{pmatrix} e^t & e^t - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Dérivée : } \begin{pmatrix} e^t & e^t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Et } Ae^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & e^t - 1 + 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \text{égalité vérifiée.}$$

15 Variation des constantes pour un système

★★★

$$A = 3I + N, e^{-sA} = e^{-3s} \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$e^{-sA}B(s) = e^{-3s}(e^{3s} - 2se^{3s}, 2e^{3s}) = (1 - 2s, 2), \text{ d'intégrale } (t - t^2, 2t) \text{ sur } [0, t].$$

$$X(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t - t^2 \\ 2t \end{pmatrix} = e^{3t}(t + t^2, 2t).$$

$$\text{Contrôle : } x' = e^{3t}(1 + 5t + 3t^2) = 3x + y + e^{3t} \text{ et } y' = e^{3t}(2 + 6t) = 3y + 2e^{3t}.$$

16 Déterminant d'une exponentielle

★★★

A est diagonalisable, de valeurs propres 5 et 2 : $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(5, 2)$. Donc $e^A = P \text{diag}(e^5, e^2) P^{-1}$ et $\det e^A = e^5 e^2 = e^7 = e^{\text{tr}A}$.

En général, si $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(\lambda_i)$, $\det e^A = \prod e^{\lambda_i} = e^{\sum \lambda_i} = e^{\text{tr}A}$. En particulier e^A est toujours inversible.

17 Résonance

★★★

$$y_p' = \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{t}{2} \cos 2t, y_p'' = \cos 2t - t \sin 2t, \text{ donc } y_p'' + 4y_p = \cos 2t.$$

$$\text{Solution générale : } y = a \cos 2t + b \sin 2t + \frac{t}{4} \sin 2t.$$

Le terme $\frac{t}{4} \sin 2t$ a une amplitude qui croît linéairement : la solution n'est pas bornée. C'est la résonance, car $2i$ est racine de l'équation caractéristique $r^2 + 4 = 0$ et la fréquence du second membre est celle du système.

18 Régimes d'un oscillateur amorti

★★★★

a. $\Delta = k^2 - 16$. Si $0 < k < 4$, $\Delta < 0$: pseudo-périodique. Si $k = 4$: critique, $y = (a + bt)e^{-2t}$. Si $k > 4$: apériodique, deux racines réelles négatives.

b. $k = 1$: racines $\frac{-1 \pm i\sqrt{15}}{2}$, pulsation $\omega = \frac{\sqrt{15}}{2}$, pseudo-période $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi}{\sqrt{15}} \approx 3,24$.

c. Si $k \geq 4$, les racines réelles ont pour somme $-k < 0$ et pour produit $4 > 0$: elles sont négatives. Si $k < 4$, la partie réelle est $-k/2 < 0$. Dans tous les cas e^{rt} , te^{rt} tendent vers 0 quand $\text{Re}(r) < 0$.

19 Solutions globales et explosion

★★★★

$y' = 2ty$ est linéaire à coefficient continu sur $\mathbb{R}$: $y(t) = e^{t^2}$, définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, comme l'assure le théorème de Cauchy linéaire.

$y' = y^2$ n'est pas linéaire : $y(t) = \frac{1}{1-t}$, solution maximale sur $] -\infty, 1[$, qui explose en $t = 1$. Dans le cas linéaire, l'explosion en temps fini est impossible.

20 Variation des constantes avec une tangente

★★★★

$W = \cos t \cos t - (-\sin t) \sin t = 1$. Donc

$$c'_1 = -\sin t \tan t = -\frac{\sin^2 t}{\cos t} = -\frac{1}{\cos t} + \cos t \text{ et } c'_2 = \cos t \tan t = \sin t.$$

Une primitive de $1/\cos t$ est $\ln \frac{1+\sin t}{\cos t}$. On prend $c_1 = -\ln \frac{1+\sin t}{\cos t} + \sin t$ et $c_2 = -\cos t$.

$$y_p = c_1 \cos t + c_2 \sin t = -\cos t \ln \frac{1+\sin t}{\cos t}.$$

Solution générale : $y = a \cos t + b \sin t - \cos t \ln \frac{1+\sin t}{\cos t}$.

Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Équations différentielles linéaires :
exercices de maths Maths Spé

QCM de maths

Équations différentielles linéaires : QCM
de maths Maths Spé

Contrôles de maths

Équations différentielles linéaires :
contrôle de maths Maths Spé

Exercices de maths

Probabilités et variables aléatoires
discrètes : exercices de maths Maths Spé

 Exercices de maths

Algèbre générale et dualité : exercices de maths Maths Spé

 QCM de maths

Probabilités et variables aléatoires discrètes : QCM de maths Maths Spé

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage