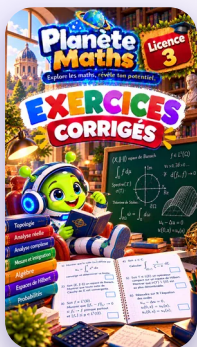


Équations différentielles : exercices corrigés de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Passer à l'ordre 1



On pose $Y = (y, y')$. Alors $Y' = (y', y'') = (y', -6y - 5y')$, donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique est $\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det A = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda + 3)$.

Les valeurs propres sont -2 et -3 .

2 Lipschitz ou pas ?



- a. Oui : $||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2|$, constante 1 (même globalement).
- b. Oui : f est C^1 , donc localement lipschitzienne (pas globalement, car $f' = 3y^2$ n'est pas bornée).
- c. Non en 0 : $\frac{|f(y) - f(0)|}{|y|} = \frac{1}{\sqrt{|y|}} \rightarrow +\infty$.
- d. Oui : $|\sin y_1 - \sin y_2| \leq |y_1 - y_2|$ par l'inégalité des accroissements finis.

3 Exponentielle d'une diagonale



Les puissances de A sont $\text{diag}(2^k, (-1)^k, 0^k)$, donc $e^{tA} = \text{diag}(e^{2t}, e^{-t}, 1)$.

Ainsi $\det(e^A) = e^2 \times e^{-1} \times 1 = e$, ce qui confirme $\det(e^A) = e^{\text{tr } A}$ avec $\text{tr } A = 1$.

4 Une matrice nilpotente



On a $N^2 = 0$, donc la série s'arrête : $e^{tN} = I + tN = \begin{pmatrix} 1 & 3t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$Y(t) = e^{tN}(2, 1) = (2 + 3t, 1)$. Vérification : $y'_2 = 0$ et $y'_1 = 3 = 3y_2$.

5 Une équation à variable séparable



L'équation est linéaire : $y'/y = t$, donc $\ln |y| = t^2/2 + c$ et $y(t) = 3e^{t^2/2}$ (car $y(0) = 3$).

$y(2) = 3e^2 \approx 22,17$. Comme $f(t, y) = ty$ est linéaire en y , la solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$ entier.

6 Équilibres d'une équation logistique



$f(x) = 2x - \frac{x^2}{2}$ s'annule en $x = 0$ et $x = 4$. On a $f'(x) = 2 - x$.

$f'(0) = 2 > 0$: l'équilibre 0 est instable. $f'(4) = -2 < 0$: l'équilibre 4 est asymptotiquement stable.

7 Une explosion



On sépare les variables : $-\frac{1}{y} = t - \frac{1}{2}$, donc $y(t) = \frac{2}{1 - 2t}$.

Le dénominateur s'annule en $t = 1/2$, et $y \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow 1/2^-$. L'intervalle maximal contenant 0 est $] -\infty, 1/2[$.

8 Estimation par Gronwall



Par le lemme de Gronwall avec $a = 0,2$ et $L = 3$: $u(2) \leq 0,2 e^6 \approx 80,69$.

Avec $a = 0$, on obtient $u(t) \leq 0$, donc $u = 0$ puisque u est positive : c'est le mécanisme de l'unicité.

9 Un système symétrique



Le polynôme caractéristique est $(\lambda - 2)^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$. Vecteurs propres : $(1, -1)$ pour 1, $(1, 1)$ pour 3.

On trouve $e^{tA} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t} + e^t & e^{3t} - e^t \\ e^{3t} - e^t & e^{3t} + e^t \end{pmatrix}$.

Donc $Y(t) = e^{tA}(2, 0) = (e^{3t} + e^t, e^{3t} - e^t)$. On vérifie $Y(0) = (2, 0)$.

10 Une rotation



On a $A = 2J$ avec $J^2 = -I$. Donc $A^{2k} = (-1)^k 4^k I$ et $A^{2k+1} = (-1)^k 4^k A$. En séparant les termes pairs et impairs, $e^{tA} = \cos(2t) I + \sin(2t) J$, ce qui est la matrice annoncée.

$Y(t) = (\cos 2t - \sin 2t, \sin 2t + \cos 2t)$. Alors

$\|Y\|^2 = (\cos 2t - \sin 2t)^2 + (\sin 2t + \cos 2t)^2 = 2$: $\|Y(t)\| = \sqrt{2}$ pour tout t , la trajectoire est un cercle de rayon $\sqrt{2}$ (centre, stable non asymptotique).

11 Un bloc de Jordan



$A = 3I + N$ avec $N^2 = 0$, donc $e^{tA} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$Y(t) = e^{3t}(t, 1)$, donc $Y(1) = (e^3, e^3) \approx (20,09, 20,09)$.

La seule valeur propre est $3 > 0$: l'origine est instable.

12 Formule de Duhamel



$$y(t) = e^{-2t} \cdot 1 + \int_0^t e^{-2(t-s)} 6e^s ds = e^{-2t} + 6e^{-2t} \int_0^t e^{3s} ds = e^{-2t} + 2e^{-2t}(e^{3t} - 1).$$

Donc $y(t) = 2e^t - e^{-2t}$. Vérification : $y(0) = 1$ et

$$y' + 2y = 2e^t + 2e^{-2t} + 4e^t - 2e^{-2t} = 6e^t.$$

13 Classer trois matrices



a. $T = -5$, $D = 6$, $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$: valeurs propres -3 et -2 , nœud stable.

b. $T = -2$, $D = 1 + 4 = 5$, $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$: valeurs propres $-1 \pm 2i$, foyer stable.

c. $T = 1$, $D = -6 < 0$: valeurs propres 3 et -2 , col, instable.

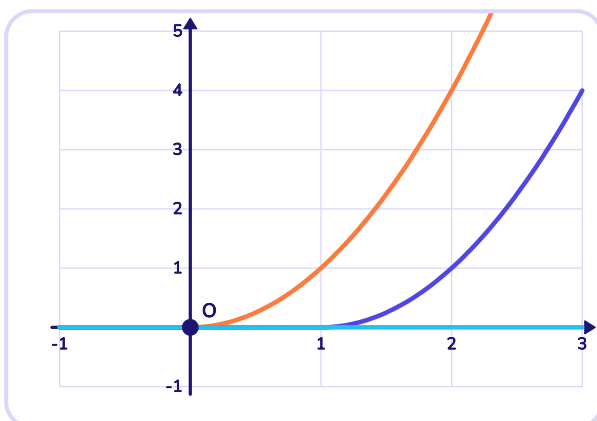
14 Non-unicité



(a) $z'_0 = 0 = 2\sqrt{0}$. Pour z_1 : si $t > 0$, $z'_1 = 2t = 2\sqrt{t^2}$; si $t < 0$, $z'_1 = 0$; en 0, les dérivées à gauche et à droite valent 0, et z_1 est dérivable.

(b) Le même calcul montre que y_c est solution pour tout $c \geq 0$, avec $y_c(0) = 0$: il y a une infinité de solutions. Par exemple $y_1(3) = (3-1)^2 = 4$ alors que $z_0(3) = 0$.

(c) $f(y) = 2\sqrt{|y|}$ n'est pas lipschitzienne au voisinage de 0 : $f(y)/y = 2/\sqrt{y} \rightarrow +\infty$.



15 Solutions maximales



(a) $\frac{y'}{1+y^2} = 1$, donc $\arctan y = t$ et $y(t) = \tan t$, définie sur $] -\pi/2, \pi/2[$. Quand $t \rightarrow \pi/2^-$, $y \rightarrow +\infty$: explosion en temps fini (et f est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, donc c'est bien $\|y\| \rightarrow \infty$).

(b) $\frac{y'}{y^2} = t$ donne $-\frac{1}{y} = \frac{t^2}{2} + c$; avec $y(0) = 1$, $c = -1$, donc $\frac{1}{y} = 1 - \frac{t^2}{2}$ et $y(t) = \frac{2}{2-t^2}$.

Le dénominateur s'annule en $t = \pm\sqrt{2}$: la solution maximale est définie sur $] -\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ et tend vers $+\infty$ aux deux bornes.

16 Dépendance continue

★★★★

- (a) $\partial_y f = \cos y$ est bornée par 1, donc f est 1-lipschitzienne en y . Pour $u = |y_1 - y_2|$,
 $u(t) \leq u(0) + \int_0^t |f(s, y_1) - f(s, y_2)| ds \leq 0,05 + \int_0^t u$. Gronwall donne $u(t) \leq 0,05 e^t$.
(b) $0,05 e^t \leq 0,5$ équivaut à $e^t \leq 10$, soit $t \leq \ln 10 \approx 2,30$.

17 Démonstration de Gronwall

★★★★

On pose $v(t) = a + L \int_0^t u(s) ds$, de classe C^1 car u est continue, avec $v' = Lu$.

Par hypothèse $u \leq v$, et $L \geq 0$ donne $v' = Lu \leq Lv$. Alors

$$\frac{d}{dt}(v(t)e^{-Lt}) = (v' - Lv)e^{-Lt} \leq 0 : ve^{-Lt} \text{ est décroissante, donc } v(t)e^{-Lt} \leq v(0) = a.$$

Ainsi $u(t) \leq v(t) \leq a e^{Lt}$.

18 Exponentielle d'un bloc de Jordan 3x3

★★★★

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N^3 = 0.$$

$$\text{Comme } 2I \text{ et } N \text{ commutent, } e^{tA} = e^{2t} \left(I + tN + \frac{t^2}{2} N^2 \right) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Y(t) = e^{2t} \left(1 + 2t + \frac{3t^2}{2}, 2 + 3t, 3 \right).$$

19 Un système de compétition



(a) $O(0, 0)$, $P(2, 0)$, $Q(0, 3)$ et $R(1, 1)$ (intersection des droites $x + y = 2$ et $2x + y = 3$).

(b) La jacobienne vaut $J(x, y) = \begin{pmatrix} 2 - 2x - y & -x \\ -2y & 3 - 2x - 2y \end{pmatrix}$.

- $J(O) = \text{diag}(2, 3)$: nœud instable.
- $J(P) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, valeurs propres -2 et -1 : nœud stable.
- $J(Q) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$, valeurs propres -1 et -3 : nœud stable.
- $J(R) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $T = -2$, $D = -1 < 0$: col, instable.

(c) Selon la donnée initiale, une espèce élimine l'autre : on converge vers P ou vers Q . La coexistence R est instable, ses variétés stables séparent les bassins d'attraction.

20 Fonction de Lyapunov



(a) La jacobienne en $(0, 0)$ est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, de valeurs propres $\pm i$ (parties réelles nulles) : la linéarisation est un centre et ne permet pas de conclure.

(b) $\frac{d}{dt}V = 2xx' + 2yy' = 2x(-y - x^3) + 2y(x - y^3) = -2(x^4 + y^4) < 0$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$.

V est une fonction de Lyapunov stricte : l'origine est asymptotiquement stable.

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

 Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Équations différentielles : exercices de maths Licence L3

 QCM de maths

Équations différentielles : QCM de maths Licence L3

 Contrôles de maths

Équations différentielles : contrôle de maths Licence L3

 Exercices de maths

Fonctions holomorphes : exercices de maths Licence L3

 Exercices de maths

 QCM de maths

Singularités et théorème des résidus :
exercices de maths Licence L3

Fonctions holomorphes : QCM de maths
Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage