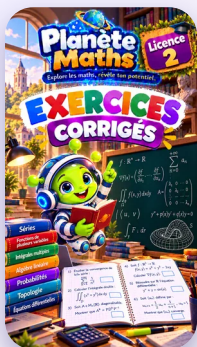


Équations différentielles : exercices corrigés de maths Licence L2 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 128 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Vérifier une solution



On dérive : $y'(t) = 2e^{2t} + 1$. Donc $y' - 2y = 2e^{2t} + 1 - 2e^{2t} - 2t = 1 - 2t$. L'égalité est vraie pour tout réel t : y est solution.

2 Équations homogènes



a) Les solutions sont Ce^{4t} ; $y(0) = C = 3$, donc $y(t) = 3e^{4t}$.

b) Les solutions sont Ce^{-5t} ; $y(1) = Ce^{-5} = 2$ donne $C = 2e^5$, donc $y(t) = 2e^5 e^{-5t} = 2e^{-5(t-1)}$.

3 Ordre et linéarité



a) ordre 2, linéaire (à coefficients constants). b) ordre 1, non linéaire à cause de y^2 . c) ordre 3, linéaire. d) ordre 1, non linéaire car le produit yy' est de degré 2.

4 Équation caractéristique



L'équation caractéristique $r^2 - 5r + 6 = (r - 2)(r - 3) = 0$ a pour racines **2** et **3**. Les solutions sont $y(t) = Ae^{2t} + Be^{3t}$, $A, B \in \mathbb{R}$.

5 Oscillateur harmonique



$r^2 + 9 = 0$ donne $r = \pm 3i$, donc $y = A \cos 3t + B \sin 3t$. Alors $y(0) = A = 1$ et $y'(0) = 3B = 3$, d'où $B = 1$. Finalement $y(t) = \cos 3t + \sin 3t$.

6 Chercher les équilibres



Un équilibre annule le second membre. a) $(y - 2)(y + 5) = 0$ donne $y = 2$ et $y = -5$. b) $3y - y^2 = y(3 - y) = 0$ donne $y = 0$ et $y = 3$.

7 Vrai ou faux ?



a) Faux : si $y'_1 + 2y_1 = 1$ et $y'_2 + 2y_2 = 1$, alors $(y_1 + y_2)' + 2(y_1 + y_2) = 2 \neq 1$.

b) Vrai : $(y_1 - y_2)' + 2(y_1 - y_2) = 1 - 1 = 0$.

c) Faux : pour $y = 0$, le membre de gauche vaut $0 \neq 1$.

8 Retour à l'équilibre



L'homogène donne Ce^{-2t} . La constante $y_p = 2$ vérifie $0 + 2 \cdot 2 = 4$. Donc $y(t) = 2 + Ce^{-2t}$. Avec $y(0) = 5 : 2 + C = 5, C = 3$, d'où $y(t) = 2 + 3e^{-2t}$.

Comme $e^{-2t} \rightarrow 0$, $y(t) \rightarrow 2$ g/L en $+\infty$: la teneur se rapproche de l'équilibre 2.

9 Second membre trigonométrique



Avec $y_p = \alpha \cos t + \beta \sin t : y'_p + y_p = (\alpha + \beta) \cos t + (\beta - \alpha) \sin t = 2 \cos t$, donc $\alpha + \beta = 2$ et $\beta - \alpha = 0$, soit $\alpha = \beta = 1$.

Solution générale : $y = Ce^{-t} + \cos t + \sin t$. Comme $y(0) = C + 1 = 0, C = -1$ et $y(t) = -e^{-t} + \cos t + \sin t$.

10 Variation de la constante



Une primitive de $-\frac{2}{t}$ est $-2 \ln t$; l'homogène a pour solutions Ct^2 . On pose $y = C(t) t^2$: $C'(t) t^2 = t^2$, donc $C'(t) = 1$ et $C(t) = t + K$. Ainsi $y(t) = t^3 + Kt^2$.

La condition $y(1) = 1 + K = 3$ donne $K = 2 : y(t) = t^3 + 2t^2$.

11 Racine double



$r^2 + 2r + 1 = (r + 1)^2$: racine double -1 , donc $y = (A + Bt)e^{-t}$. Alors $y(0) = A = 2$.

On a $y' = (B - A - Bt)e^{-t}$, donc $y'(0) = B - A = 0, B = 2$.

Finalement $y(t) = 2(1 + t)e^{-t}$.

12 Ressort amorti



$r^2 + 4r + 13 = 0$, $\Delta = 16 - 52 = -36$, donc $r = -2 \pm 3i$ et

$y = e^{-2t}(A \cos 3t + B \sin 3t)$. $y(0) = A = 1$. Comme

$y' = e^{-2t}((-2A + 3B) \cos 3t + (-2B - 3A) \sin 3t)$, $y'(0) = -2A + 3B = 0$, donc $B = \frac{2}{3}$.

$y(t) = e^{-2t} \left(\cos 3t + \frac{2}{3} \sin 3t \right)$. Le facteur e^{-2t} tend vers 0 et le reste est borné, donc $y(t) \rightarrow 0$: le ressort revient au repos en oscillant.

13 Une équation à variables séparables



On écrit $yy' = t$, soit $\left(\frac{y^2}{2}\right)' = t$. En intégrant : $\frac{y^2}{2} = \frac{t^2}{2} + K$, donc $y^2 = t^2 + C$. Avec $y(0) = 2$: $C = 4$.

Comme $y > 0$, $y(t) = \sqrt{t^2 + 4}$, défini sur $\mathbb{R}$. Vérification : $y'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 4}} = \frac{t}{y}$.

14 Cauchy-Lipschitz s'applique-t-il ?



a) $f(t, y) = y^2 + t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc localement lipschitzienne en y : oui, il y a une unique solution maximale.

b) $y \mapsto \sqrt{|y|}$ n'est pas lipschitzienne au voisinage de 0 : le théorème ne s'applique pas. De fait, la fonction nulle est solution, et $y(t) = \frac{t^2}{4}$ pour $t \geq 0$ aussi : $y' = \frac{t}{2} = \sqrt{y}$. Il y a donc au moins deux solutions.

15 Exponentielle d'une matrice de rotation

★★★★

$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$. Donc $A^{2k} = (-1)^k I$ et $A^{2k+1} = (-1)^k A$. La série donne

$$e^{tA} = \cos t I + \sin t A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Alors $X(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + 2 \sin t \\ -\sin t + 2 \cos t \end{pmatrix}$. Vérification : $x' = -\sin t + 2 \cos t = y$ et $y' = -\cos t - 2 \sin t = -x$.

16 Système diagonalisable

★★★★

$T = 7, D = 10$: les valeurs propres sont 5 et 2. Pour 5 : $(A - 5I)v = 0$ donne $v_1 = (1, 1)$. Pour 2 : $(A - 2I)v = 0$ donne $v_2 = (1, -2)$.

On écrit $(1, 0) = a(1, 1) + b(1, -2)$: $a + b = 1$ et $a - 2b = 0$, donc $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}$. Ainsi

$$x(t) = \frac{2e^{5t} + e^{2t}}{3}, \quad y(t) = \frac{2e^{5t} - 2e^{2t}}{3}.$$

Vérification : $x' = \frac{10e^{5t} + 2e^{2t}}{3} = 4x + y$.

17 Équation d'ordre 2 en système

★★★★

a) Avec $X = (y, y')$: $y'' = -2y - 3y'$, donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

b) $T = -3$ et $D = 2$, donc le polynôme caractéristique est $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$: valeurs propres -1 et -2 . Elles sont réelles et négatives : l'origine est un nœud asymptotiquement stable.

c) $y = Ae^{-t} + Be^{-2t} \rightarrow 0$ en $+\infty$, quelles que soient les conditions initiales.

18 Population limitée



a) $2y(3 - y) = 0$ donne $y = 0$ et $y = 3$.

b) Posons $D = 1 + 2e^{-6t}$. Alors $y = 3/D$ et $y' = \frac{36e^{-6t}}{D^2}$. Or
 $3 - y = \frac{3(D - 1)}{D} = \frac{6e^{-6t}}{D}$, donc $2y(3 - y) = 2 \cdot \frac{3}{D} \cdot \frac{6e^{-6t}}{D} = \frac{36e^{-6t}}{D^2} = y'$. De plus
 $y(0) = \frac{3}{3} = 1$. Par unicité (Cauchy-Lipschitz), c'est la solution.

c) $\frac{3}{1 + 2e^{-6t}} = 2,5$ équivaut à $1 + 2e^{-6t} = 1,2$, soit $e^{-6t} = 0,1$, donc $t = \frac{\ln 10}{6} \approx 0,38$ unité de temps.

19 Explosion en temps fini



Pour $y \neq 0$, $\frac{y'}{y^2} = 1$ donne $-\frac{1}{y} = t + K$.

a) $y(0) = 1 : K = -1$, donc $y(t) = \frac{1}{1 - t}$, maximale sur $] -\infty ; 1[$, avec $y \rightarrow +\infty$ en 1^- : explosion.

b) $y(0) = -1 : K = 1$, donc $y(t) = -\frac{1}{1 + t}$, maximale sur $] -1 ; +\infty[$; elle explose en -1^+ dans le passé mais tend vers 0 en $+\infty$. Le signe de la condition initiale décide si l'explosion se produit dans le futur ou dans le passé.

20 Trois équilibres



a) $f(y) = 0$ donne $y \in \{0, 2, 5\}$.

b) $f(y) = -y^3 + 7y^2 - 10y$, donc $f'(y) = -3y^2 + 14y - 10$. $f'(0) = -10 < 0$: stable.
 $f'(2) = -12 + 28 - 10 = 6 > 0$: instable. $f'(5) = -75 + 70 - 10 = -15 < 0$: stable.

c) Signe de f : positif sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]2 ; 5[$, négatif sur $]0 ; 2[$ et sur $]5 ; +\infty[$. Pour $y(0) = 1$, la solution décroît vers 0. Pour $y(0) = 3$, elle croît vers 5. Pour $y(0) = -1$, elle croît vers 0.

Le bassin d'attraction de 0 est donc $] -\infty ; 2[$, et celui de 5 est $]2 ; +\infty[$.

21 Nature des équilibres de systèmes plans



- a) $T = -5, D = 6, T^2 - 4D = 1 > 0$: valeurs propres -3 et -2 (matrice triangulaire), nœud asymptotiquement stable.
- b) $T = 2, D = 5, T^2 - 4D = -16 < 0$: valeurs propres $1 \pm 2i$, partie réelle positive, foyer instable.
- c) $T = 1, D = -6 < 0$: valeurs propres 3 et -2 de signes opposés, col, instable.

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 128 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de Licence L2

Changer de niveau

Niveau : Licence L2

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi



Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Équations différentielles : exercices de maths Licence L2

 QCM de maths

Équations différentielles : QCM de maths Licence L2

 Contrôles de maths

Équations différentielles : contrôle de maths Licence L2

 Exercices de maths

Probabilités sur un univers dénombrable : exercices de maths Licence L2

 Exercices de maths

Espaces vectoriels et applications linéaires : exercices de maths Licence L2

 QCM de maths

Probabilités sur un univers dénombrable : QCM de maths Licence L2

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage