

Équations différentielles linéaires : exercices corrigés de maths Licence L1 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 123 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Une équation homogène



Ici $a = -5$ et $A(x) = -5x$. Les solutions sont $y(x) = C e^{5x}$, $C \in \mathbb{R}$.

Vérification : $y' = 5C e^{5x} = 5y$, donc $y' - 5y = 0$.

2 Une condition initiale



La solution générale est $y(x) = C e^{-3x}$. La condition $y(0) = C = 4$ donne $y(x) = 4e^{-3x}$.

Alors $y(1) = 4e^{-3} \approx 0,199$.

3 Vrai ou faux ?



- a. Vrai : $y' = 2e^{2x}$, donc $y' - 2y = 0$.
- b. Faux : si $y'_1 + y_1 = 1$ et $y'_2 + y_2 = 1$, la somme vérifie $(y_1 + y_2)' + (y_1 + y_2) = 2$.
L'ensemble des solutions d'une équation avec second membre non nul n'est pas stable par somme.
- c. Vrai : $y' = 0$ et $2 \times 3 = 6$, donc $0 + 6 = 6$.

4 Solution constante



Pour $y = c$, $y' = 0$ donc $4c = 12$ et $c = 3$ est une solution particulière.

L'équation homogène $y' + 4y = 0$ a pour solutions Ce^{-4x} . Donc $y(x) = 3 + Ce^{-4x}$,
 $C \in \mathbb{R}$.

5 Équation caractéristique



L'équation caractéristique $r^2 - 5r + 6 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$ et pour racines $r_1 = 2$, $r_2 = 3$.

Les solutions sont $y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

6 Oscillateur



L'équation caractéristique $r^2 + 16 = 0$ a pour racines $\pm 4i$ ($\alpha = 0$, $\beta = 4$).

Les solutions réelles sont $y(x) = \lambda \cos 4x + \mu \sin 4x$.

7 Le thé qui refroidit



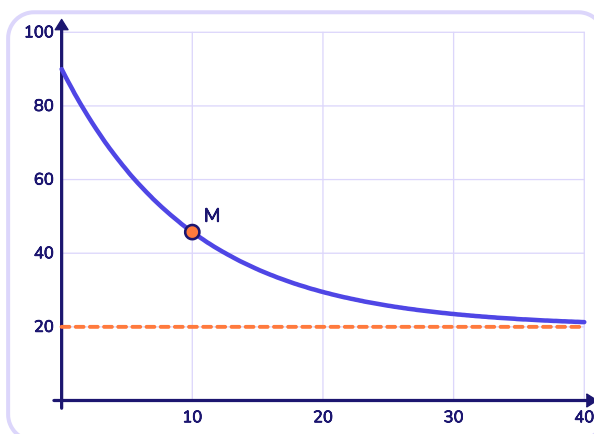
a. Solution constante : $0,1c = 2$, $c = 20$. Homogène : $Ce^{-0,1t}$. Donc

$$T(t) = 20 + Ce^{-0,1t} ; T(0) = 20 + C = 90 \text{ donne } C = 70 \text{ et } T(t) = 20 + 70e^{-0,1t}$$

b. $T(10) = 20 + 70e^{-1} \approx 45,75$ °C.

c. $20 + 70e^{-0,1t} = 30 \iff e^{-0,1t} = \frac{1}{7} \iff t = 10 \ln 7 \approx 19,46$ minutes.

Courbe (la température tend vers la température ambiante de 20 °C) :



8 Un coefficient non constant



Homogène : $A(x) = x^2$, $y_h = Ce^{-x^2}$.

Solution particulière : la constante $y = \frac{1}{2}$ convient, car $y' = 0$ et $2x \cdot \frac{1}{2} = x$.

Donc $y(x) = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}$, $C \in \mathbb{R}$.

9 Variation de la constante



Homogène : $y_h = Ce^x$. On pose $y = C(x)e^x$: $C'(x)e^x = e^{2x}$, donc $C'(x) = e^x$ et $C(x) = e^x + K$.

Ainsi $y(x) = e^{2x} + Ke^x$.

Vérification : $y' - y = 2e^{2x} + Ke^x - e^{2x} - Ke^x = e^{2x}$.

10 Sur un intervalle précis



On divise par x : $y' - \frac{2}{x}y = x^2$. Une primitive de $-\frac{2}{x}$ est $-2 \ln x$, donc $y_h = Cx^2$.

On pose $y = C(x)x^2$: $C'(x)x^2 = x^2$, donc $C'(x) = 1$, $C(x) = x + K$ et $y(x) = x^3 + Kx^2$.

La condition $y(1) = 1 + K = 3$ donne $K = 2$: $y(x) = x^3 + 2x^2$.

11 Problème de Cauchy d'ordre 2 (1)



$r^2 - 2r - 3 = (r - 3)(r + 1)$: racines 3 et -1. Donc $y = \lambda e^{3x} + \mu e^{-x}$.

Conditions : $\lambda + \mu = 2$ et $3\lambda - \mu = -2$. En additionnant, $4\lambda = 0$, donc $\lambda = 0$ et $\mu = 2$.

Conclusion : $y(x) = 2e^{-x}$.

12 Problème de Cauchy d'ordre 2 (2)



Racine double $r = -3$ ($\Delta = 36 - 36 = 0$) : $y = (\lambda + \mu x)e^{-3x}$.

$y(0) = \lambda = 1$. Puis $y'(x) = (\mu - 3\lambda - 3\mu x)e^{-3x}$, donc $y'(0) = \mu - 3 = 1$ et $\mu = 4$.

Conclusion : $y(x) = (1 + 4x)e^{-3x}$.

13 Second membre polynomial



Homogène : $r^2 - 4 = 0$, racines ± 2 , $y_h = \lambda e^{2x} + \mu e^{-2x}$.

Particulière : 0 n'est pas racine, on cherche $y_p = \alpha x + \beta$; $y_p'' = 0$ donc $-4\alpha x - 4\beta = 8x$, d'où $\alpha = -2$, $\beta = 0$ et $y_p = -2x$.

Conclusion : $y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{-2x} - 2x$.

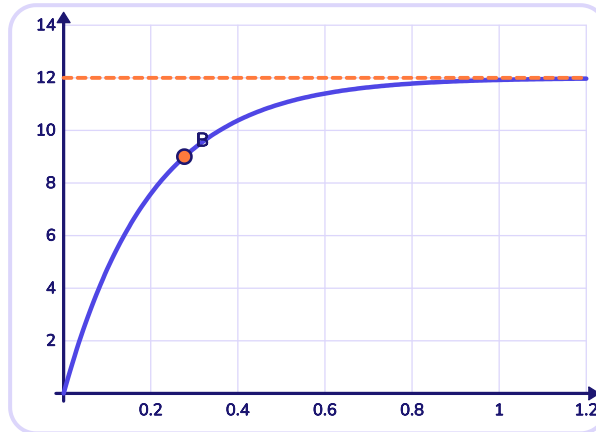
14 Charge d'un condensateur



a. On écrit $u' + 5u = 60$. Solution constante : $5c = 60$, $c = 12$. Donc

$$u(t) = 12 + Ke^{-5t} \text{ et } u(0) = 12 + K = 0 \text{ donne } K = -12 : u(t) = 12(1 - e^{-5t}).$$

b. $12(1 - e^{-5t}) = 9 \iff e^{-5t} = \frac{1}{4} \iff t = \frac{\ln 4}{5} \approx 0,277 \text{ s.}$



15 Second membre trigonométrique d'ordre 1



Pour $y' + 2y = e^{ix}$, on cherche $y_c = \gamma e^{ix} : (i + 2)\gamma = 1$, donc $\gamma = \frac{2 - i}{5}$. Alors

$$y_c = \frac{(2 - i)(\cos x + i \sin x)}{5} \text{ et sa partie imaginaire est } y_p = \frac{2 \sin x - \cos x}{5}.$$

Vérification : $y'_p = \frac{2 \cos x + \sin x}{5}$ et $2y_p = \frac{4 \sin x - 2 \cos x}{5}$, la somme vaut $\sin x$.

$$\text{Solutions : } y = \frac{2 \sin x - \cos x}{5} + Ke^{-2x}. \text{ Condition : } -\frac{1}{5} + K = 1, K = \frac{6}{5}.$$

$$\text{Conclusion : } y(x) = \frac{2 \sin x - \cos x + 6e^{-2x}}{5}.$$

16 Une équation qui se factorise

★★★★

Le premier membre est la dérivée de $(1+x^2)y$: $((1+x^2)y)' = (1+x^2)y' + 2xy$.

Donc $((1+x^2)y)' = 3x^2$, d'où $(1+x^2)y = x^3 + K$ et $y(x) = \frac{x^3 + K}{1+x^2}$ (définie sur $\mathbb{R}$ car $1+x^2 > 0$).

$$y(0) = K = 2 : y(x) = \frac{x^3 + 2}{1+x^2}.$$

17 Résonance d'ordre 2

★★★★

Homogène : racine double 2, $y_h = (\lambda + \mu x)e^{2x}$.

Le second membre e^{2x} correspond à $m = 2$, racine double : on cherche $y_p = cx^2e^{2x}$. Alors $y'_p = c(2x + 2x^2)e^{2x}$ et $y''_p = c(2 + 8x + 4x^2)e^{2x}$, donc $y''_p - 4y'_p + 4y_p = 2ce^{2x}$. On obtient $c = \frac{1}{2}$.

Conclusion : $y(x) = \left(\lambda + \mu x + \frac{x^2}{2}\right)e^{2x}$.

18 Résonance avec condition initiale

★★★★

Homogène : $\lambda \cos 2x + \mu \sin 2x$. Le second membre est résonant ($2i$ racine de $r^2 + 4$). On teste $y_p = -\frac{x \cos 2x}{4}$: $y'_p = -\frac{\cos 2x}{4} + \frac{x \sin 2x}{2}$, $y''_p = \sin 2x + x \cos 2x$, donc $y''_p + 4y_p = \sin 2x$.

Solution générale : $y = \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x - \frac{x \cos 2x}{4}$. $y(0) = \lambda = 0$;

$$y'(0) = 2\mu - \frac{1}{4} = 1, \text{ donc } \mu = \frac{5}{8}.$$

Conclusion : $y(x) = \frac{5}{8}\sin 2x - \frac{x}{4}\cos 2x$.

19 Solutions complexes d'ordre 2

★★★★

$\Delta = 4 - 20 = -16$, racines $1 \pm 2i$: $y = e^x(\lambda \cos 2x + \mu \sin 2x)$.

$y(0) = \lambda = 2$. $y' = e^x[(\lambda + 2\mu) \cos 2x + (\mu - 2\lambda) \sin 2x]$, donc $y'(0) = \lambda + 2\mu = 5$ et $\mu = \frac{3}{2}$.

Conclusion : $y(x) = e^x \left(2 \cos 2x + \frac{3}{2} \sin 2x \right)$, donc $\kappa = \frac{3}{2}$.

20 Ressort amorti

★★★★

a. $\Delta = 16 - 52 = -36$, racines $-2 \pm 3i$: $x = e^{-2t}(\lambda \cos 3t + \mu \sin 3t)$.

$x(0) = \lambda = 0,1$. $x'(0) = -2\lambda + 3\mu = 0$ donc $\mu = \frac{1}{15}$. Ainsi

$$x(t) = e^{-2t} \left(0,1 \cos 3t + \frac{1}{15} \sin 3t \right).$$

b. La pulsation est 3, donc $T = \frac{2\pi}{3} \approx 2,09$ s.

c. Le facteur e^{-2t} devient $e^{-2T} = e^{-4\pi/3} \approx 0,0152$: l'amplitude est divisée par environ 66 à chaque pseudo-période.

21 Unicité du problème de Cauchy

★★★★

a. $z' + az = (y_1' + ay_1) - (y_2' + ay_2) = b - b = 0$.

b. Donc $z(x) = Ce^{-A(x)}$. Comme $z(x_0) = 0$ et $e^{-A(x_0)} \neq 0$, on a $C = 0$, donc $z = 0$ sur I et $y_1 = y_2$.

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 123 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Équations différentielles linéaires :
exercices de maths Licence L1

QCM de maths

Équations différentielles linéaires : QCM
de maths Licence L1

Contrôles de maths

Équations différentielles linéaires :
contrôle de maths Licence L1

Exercices de maths

Complexes et polynômes : exercices de
maths Licence L1

 Exercices de maths

Arithmétique et structures : exercices de maths Licence L1

 QCM de maths

Complexes et polynômes : QCM de maths Licence L1

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage