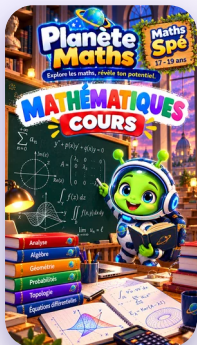


Calcul différentiel : cours de maths Maths Spé à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Dériver une fonction d'une seule variable revient à approcher sa courbe par une droite. Quand la fonction dépend de plusieurs variables, on remplace la droite par une application linéaire et le nombre dérivé par un vecteur, le gradient. Ce chapitre construit cet outil, puis s'en sert pour étudier les extrema, avec ou sans contrainte, et pour résoudre quelques équations aux dérivées partielles. Dans tout le chapitre, U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Dérivées partielles

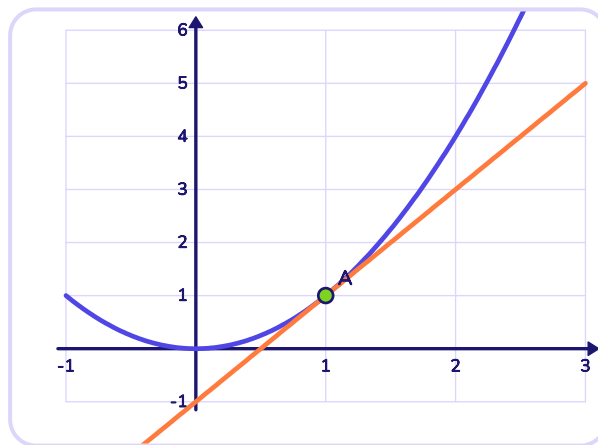
D Dérivée partielle

La dérivée partielle de f par rapport à la i -ème variable en $a \in U$ est, si elle existe, la limite

$$\partial_i f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t},$$

où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique. C'est la dérivée en 0 de la fonction d'une variable $t \mapsto f(a + te_i)$.

En pratique, on dérive par rapport à une variable en **gelant les autres**, comme si c'étaient des constantes. Géométriquement, $\partial_x f(a, b)$ est la pente de la courbe obtenue en coupant la surface $z = f(x, y)$ par le plan $y = b$.



E Exemple

Pour $f(x, y) = x^2y + \sin(xy)$, on obtient $\partial_x f = 2xy + y \cos(xy)$ et $\partial_y f = x^2 + x \cos(xy)$. En $(1, 0)$: $\partial_x f(1, 0) = 0 + 0 = 0$ et $\partial_y f(1, 0) = 1 + 1 = 2$.

Sur la figure, pour $f(x, y) = x^2y$ et $y = 1$, la section est la parabole $x \mapsto x^2$: en $x = 1$, $\partial_x f(1, 1) = 2xy = 2$ est bien la pente de la tangente orange.

2. Différentielle et gradient

D Fonction différentiable

f est différentiable en a s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|) \quad (h \rightarrow 0).$$

Cette application $L = df_a$ est unique : c'est la **différentielle** de f en a .

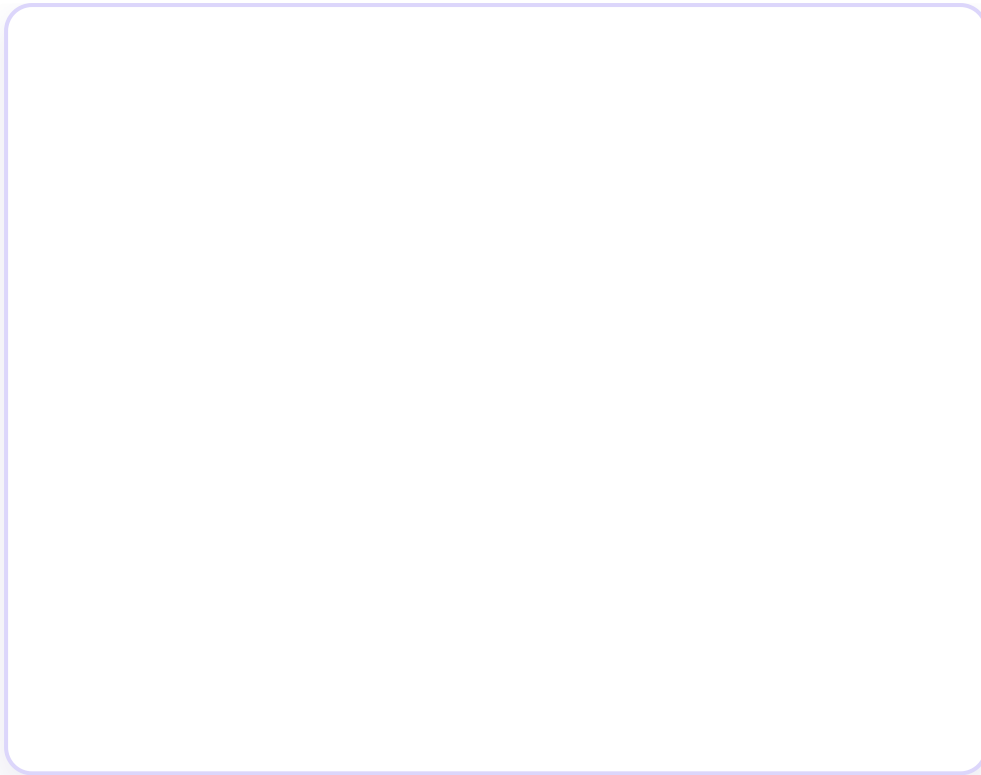
P Conséquences

Si f est différentiable en a , alors f est continue en a , admet en a des dérivées partielles et même une dérivée selon tout vecteur v , avec

$$df_a(h) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(a) h_i = \langle \nabla f(a), h \rangle, \quad D_v f(a) = df_a(v).$$

Le vecteur $\nabla f(a) = (\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a))$ est le **gradient** de f en a .

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour un vecteur unitaire v , $D_v f(a) \leq \|\nabla f(a)\|$, avec égalité si v est dirigé par $\nabla f(a)$: le gradient indique la direction de plus forte croissance. De plus, si f est constante le long d'une courbe γ (ligne de niveau), alors $\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$: le gradient est orthogonal aux lignes de niveau.



Calcul différentiel Maths Spé : lignes de niveau elliptiques de la fonction x^2+2y^2 avec trois gradients en orange, tous orthogonaux aux ellipses et orientés vers l'extérieur

E

Exemple

Soit $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ en $a = (1, 1)$. On a $\nabla f(x, y) = (2x, 4y)$, donc $\nabla f(a) = (2, 4)$ et $df_a(h_1, h_2) = 2h_1 + 4h_2$. Pour $v = (1, 0)$: $D_v f(a) = 2$.

3. Fonctions de classe C^1

D

Classe C^1

f est de classe C^1 sur U si ses dérivées partielles existent en tout point de U et sont continues sur U .

P

Théorème

Si f est de classe C^1 sur U , alors f est différentiable en tout point de U . C'est le critère pratique pour montrer qu'une fonction est différentiable : les sommes, produits, composées de fonctions C^1 le sont encore.



Piège

L'existence des dérivées partielles seule ne suffit pas. Pour $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ et $f(0, 0) = 0$, on a $\partial_x f(0, 0) = \partial_y f(0, 0) = 0$ (car f s'annule sur les axes), mais $f(t, t) = \frac{1}{2}$ pour $t \neq 0$: f n'est même pas continue en $(0, 0)$, donc pas différentiable.

4. Règle de la chaîne

P

Règle de la chaîne

Soit f de classe C^1 sur $U \subset \mathbb{R}^n$ et $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de classe C^1 d'un ouvert de $\mathbb{R}^p$ dans U . Alors $g = f \circ \varphi$ est C^1 et

$$\partial_j g(u) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(\varphi(u)) \partial_j \varphi_i(u).$$

Pour une courbe γ d'une variable : $(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$.

E**Exemple 1**

Pour $f(x, y) = x^2y$ et $\gamma(t) = (t, t^2)$:

$(f \circ \gamma)'(t) = 2xy \cdot 1 + x^2 \cdot 2t = 2t^3 + 2t^3 = 4t^3$. On retrouve bien $f(\gamma(t)) = t^4$, de dérivée $4t^3$.

E**Exemple 2 : coordonnées polaires**

Posons $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Alors $\partial_r g = \cos \theta \partial_x f + \sin \theta \partial_y f$ et $\partial_\theta g = -r \sin \theta \partial_x f + r \cos \theta \partial_y f$.

5. Dérivées d'ordre 2 et Hessienne**P****Théorème de Schwarz**

Si f est de classe C^2 sur U , alors $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$. La **matrice hessienne** $H_f(a) = (\partial_i \partial_j f(a))_{i,j}$ est alors symétrique réelle, donc diagonalisable en base orthonormée.

P**Formule de Taylor-Young à l'ordre 2**

Si f est C^2 ,

$$f(a + h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + o(\|h\|^2).$$

E**Exemple**

Pour $f(x, y) = x^2 e^y$: $\partial_x f = 2xe^y$, $\partial_y f = x^2 e^y$, puis $\partial_x^2 f = 2e^y$,
 $\partial_x \partial_y f = \partial_y \partial_x f = 2xe^y$, $\partial_y^2 f = x^2 e^y$. En $(1, 0)$: $H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Extrema locaux**P****Condition nécessaire**

Si f est différentiable sur l'ouvert U et admet un extremum local en a , alors
 $\nabla f(a) = 0$: a est un **point critique**. La réciproque est fausse.

P**Condition du second ordre**

Soit f de classe C^2 et a un point critique. Si $H_f(a)$ a toutes ses valeurs propres strictement positives, a est un minimum local strict ; si elles sont toutes strictement négatives, un maximum local strict ; si elles sont de signes opposés, a n'est pas un extremum (point selle). Si 0 est valeur propre, on ne conclut pas avec la Hessienne seule.

En dimension 2, avec $r = \partial_x^2 f$, $s = \partial_x \partial_y f$, $t = \partial_y^2 f$: si $rt - s^2 > 0$, extremum (minimum si $r > 0$, maximum si $r < 0$) ; si $rt - s^2 < 0$, point selle.



Calcul différentiel Maths Spé : lignes de niveau d'un minimum local, d'un maximum local et d'un point selle selon le signe des valeurs propres de la Hessienne

E

Exemple

Étudions $f(x, y) = x^3 - 12x + y^2 - 2y$. Alors $\nabla f = (3x^2 - 12, 2y - 2)$ s'annule en $(2, 1)$ et $(-2, 1)$. La Hessienne est $\begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. En $(2, 1)$: valeurs propres **12** et **2**, donc minimum local, valeur **-17**. En $(-2, 1)$: valeurs propres **-12** et **2**, donc point selle.



Cas dégénéré

Pour $f(x, y) = x^4 + y^2$ l'origine est un point critique et $H_f(0, 0) = \text{diag}(0, 2)$ est dégénérée, mais $f(x, y) \geq 0 = f(0, 0)$: c'est un minimum. Pour x^4 remplacé par $-x^4$, ce serait un point selle. Il faut alors étudier f directement.

7. Optimisation sous contrainte

P Extrema liés (multiplicateurs de Lagrange)

Soit f, g de classe C^1 sur U et $\Gamma = \{g = 0\}$. Si la restriction de f à Γ admet un extremum local en a et si $\nabla g(a) \neq 0$, il existe un réel λ tel que

$$\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a).$$

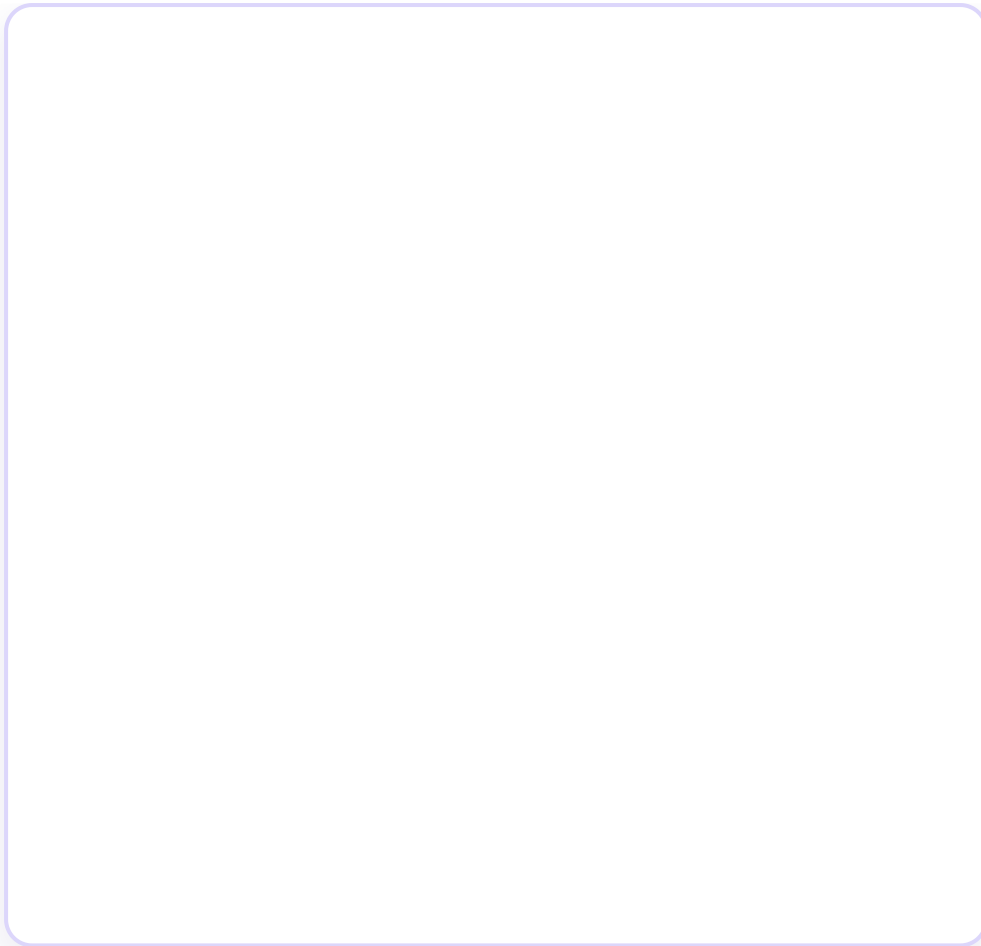
Les gradients sont colinéaires : au point optimal, la ligne de niveau de f est tangente à la contrainte.

M Méthode

1. Écrire la contrainte $g = 0$ et vérifier que ∇g ne s'annule pas sur Γ .
2. Résoudre le système $\nabla f = \lambda \nabla g, g = 0$.
3. Comparer les valeurs de f aux points trouvés ; si Γ est compact, f y atteint son maximum et son minimum parmi ces points.

E Exemple

Extrema de $f(x, y) = x + 2y$ sur le cercle $x^2 + y^2 = 5$. Ici $\nabla f = (1, 2)$ et $\nabla g = (2x, 2y)$. Le système $1 = 2\lambda x, 2 = 2\lambda y$ donne $y = 2x$, puis $5x^2 = 5$, soit $x = \pm 1$. Points $A(1, 2)$ avec $f = 5$ et $B(-1, -2)$ avec $f = -5$. Le cercle est compact : 5 est le maximum et -5 le minimum.



Calcul différentiel Maths Spé : cercle de rayon racine de 5, droites de niveau de $x+2y$ et gradients colinéaires aux points A et B où les extrema sous contrainte sont atteints

8. Équations aux dérivées partielles

Une EDP relie une fonction de plusieurs variables à ses dérivées partielles. La règle de la chaîne permet de la simplifier par un **changement de variables**.

E Équation de transport

Cherchons les fonctions C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telles que $\partial_t u + c \partial_x u = 0$. Posons $u(x, t) = v(x - ct, t)$. La règle de la chaîne donne $\partial_t u = -c \partial_1 v + \partial_2 v$ et $\partial_x u = \partial_1 v$, donc l'équation devient $\partial_2 v = 0$: v ne dépend que de sa première variable. Les solutions sont $u(x, t) = \varphi(x - ct)$, avec φ de classe C^1 : une onde qui se déplace à la vitesse c .



Astuce de Zyro

Pour vérifier qu'une fonction résout une EDP, ne cherche pas à la deviner : dérive-la avec la règle de la chaîne et remplace. Si tout s'annule, c'est gagné.



Équation de Laplace

$u(x, y) = x^2 - y^2$ vérifie $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 2 - 2 = 0$: elle est harmonique. C'est aussi le cas de xy .

À retenir

- Une **dérivée partielle** se calcule en gelant les autres variables ; elle ne suffit pas à assurer la différentiabilité.
- $C^1 \Rightarrow$ différentiable $\Rightarrow$ continue et $df_a(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$; le gradient est orthogonal aux lignes de niveau.
- **Chaîne** : $(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$.
- Schwarz : en classe C^2 , la Hessienne est symétrique ; Taylor-Young à l'ordre 2 avec $\frac{1}{2}h^T H h$.
- Extremum local sur un ouvert $\Rightarrow \nabla f = 0$; la Hessienne classe minimum, maximum, selle (cas dégénéré à étudier à part).
- Sous contrainte $g = 0$: $\nabla f = \lambda \nabla g$; en EDP, on change de variables par la règle de la chaîne.

Le livre de cours de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Calcul différentiel : exercices de maths
Maths Spé

Contrôles de maths

Calcul différentiel : contrôle de maths
Maths Spé

QCM de maths

Calcul différentiel : QCM de maths Maths
Spé

Exercices de maths

Équations différentielles linéaires :
exercices de maths Maths Spé

 Exercices de maths

Probabilités et variables aléatoires
discrètes : exercices de maths Maths Spé

 Contrôles de maths

Équations différentielles linéaires :
contrôle de maths Maths Spé

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage