

Calcul différentiel : exercices corrigés de maths Maths Spé à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Dérivées partielles à calculer



On gèle y pour dériver en x : $\partial_x f = 6xy + 2$. On gèle x pour dériver en y :
 $\partial_y f = 3x^2 - 15y^2$.

2 Exponentielle et évaluation



$\partial_x g = e^y$ et $\partial_y g = xe^y$. En $(2, 0)$: $\partial_x g = e^0 = 1$ et $\partial_y g = 2 \times 1 = 2$.

3 Gradient en dimension 3



$\nabla h = (yz, xz, xy + 2z)$. En $(1, 2, 3)$: $(6, 3, 2 + 6) = (6, 3, 8)$.

4 Différentielle et approximation



- a. $\nabla f = (2x + 3y, 3x)$, donc $\nabla f(a) = (-1, 3)$ et $df_a(h_1, h_2) = -h_1 + 3h_2$.
- b. $f(a) = 1 - 3 = -2$ et $h = (0,02; 0,01)$, donc
 $f(1,02; -0,99) \approx -2 - 0,02 + 0,03 = -1,99$. (La valeur exacte est $-1,989$.)

5 Vrai ou faux ?



- a. Vrai : $\partial_i f(a) = df_a(e_i)$.
- b. Faux : $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, $f(0, 0) = 0$, a ses deux dérivées partielles nulles en $(0, 0)$ (elle s'annule sur les axes), mais $f(t, t) = \frac{1}{2} \nrightarrow 0$: elle n'est pas continue en $(0, 0)$.
- c. Vrai : c'est le théorème du cours.

6 Dérivée dans une direction



f est C^1 , $\nabla f = (2xy, x^2)$ donc $\nabla f(a) = (4, 1)$. Alors
 $D_v f(a) = 4 \times \frac{3}{5} + 1 \times \frac{4}{5} = \frac{16}{5} = 3,2$.

7 Une composée avec une courbe



$\gamma'(t) = (e^t, 2t)$ et $\nabla f = (y, x)$. Donc $(f \circ \gamma)'(t) = t^2 e^t + e^t \cdot 2t = (t^2 + 2t)e^t$.

Directement : $f(\gamma(t)) = t^2 e^t$, de dérivée $2te^t + t^2 e^t$. Même résultat.

8 Hessienne à un point



$\partial_x f = 2xy^3$, $\partial_y f = 3x^2 y^2$. Puis $\partial_x^2 f = 2y^3$, $\partial_y \partial_x f = 6xy^2$, $\partial_x \partial_y f = 6xy^2$, $\partial_y^2 f = 6x^2 y$.
Les dérivées croisées sont égales, comme prévu pour une fonction C^2 .

En $(1, -1)$: $H_f(1, -1) = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$.

9 Coordonnées polaires



Directement : $g = r^3 \cos \theta \sin^2 \theta$, donc $\partial_\theta g = r^3(-\sin^3 \theta + 2 \cos^2 \theta \sin \theta)$.

Par la chaîne : $\partial_\theta g = -r \sin \theta y^2 + r \cos \theta \cdot 2xy = -r^3 \sin^3 \theta + 2r^3 \cos^2 \theta \sin \theta$. Les deux expressions coïncident.

$$\text{En } r = 2, \theta = \frac{\pi}{4} : 8 \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = 2\sqrt{2}.$$

10 Un minimum local



$\nabla f = (2x + y - 3, x + 2y)$. Le système $2x + y = 3, x + 2y = 0$ donne $x = 2, y = -1$: un seul point critique.

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} : rt - s^2 = 3 > 0 \text{ et } r = 2 > 0, \text{ donc minimum local en } (2, -1), \text{ de valeur } 4 - 2 + 1 - 6 = -3.$$

11 Un point selle



$\nabla f = (2x + 2, -8y)$ s'annule uniquement en $(-1, 0)$. $H_f = \text{diag}(2, -8)$ a des valeurs propres de signes opposés : point selle.

Directement : $f(-1 + t, 0) = -1 + t^2 > -1$ et $f(-1, s) = -1 - 4s^2 < -1$:

$f(-1, 0) = -1$ n'est ni minimum ni maximum local.

12 Fonction harmonique



$$\partial_x u = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \text{ donc } \partial_x^2 u = \frac{2(x^2 + y^2) - 4x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}. \text{ Par symétrie des rôles,}$$
$$\partial_y^2 u = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

La somme est nulle : u est harmonique.

13 Une EDP linéaire



a. Par la chaîne, $\partial_x u = 3\varphi'(3x + 2y)$ et $\partial_y u = 2\varphi'(3x + 2y)$. Donc

$$2 \cdot 3\varphi' - 3 \cdot 2\varphi' = 0.$$

b. $u(x, 0) = \varphi(3x) = x^2$ donne $\varphi(s) = \frac{s^2}{9}$, donc $u(x, y) = \frac{(3x + 2y)^2}{9}$.

14 Optimiser un produit



Lagrange : $\nabla f = (y, x) = \lambda(1, 1)$, donc $x = y$ et $x + y = 10$ donne $x = y = 5$, $f = 25$.

Substitution : $f(x, 10 - x) = 10x - x^2 = 25 - (x - 5)^2 \leq 25$, avec égalité en $x = 5$. Le maximum est 25.

15 Un point critique dégénéré



$\partial_x f = 4x^3 - 4(x - y)$, $\partial_y f = 4y^3 + 4(x - y)$. En ajoutant : $x^3 + y^3 = 0$, donc $y = -x$.

Alors $x^3 = x - y = 2x$, d'où $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{2}$. Points critiques : $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

$H_f = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$. En $(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$: $\begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$, $rt - s^2 = 384 > 0$ et

$r > 0$: minima locaux, valeur $4 + 4 - 2 \cdot 8 = -8$.

En $(0, 0)$: $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ de déterminant nul, on ne conclut pas. Mais $f(t, t) = 2t^4 > 0$ et $f(t, -t) = 2t^4 - 8t^2 < 0$ pour $t \neq 0$ petit : pas d'extremum en $(0, 0)$.

16 Extrema liés sur une ellipse

★★★

$g = x^2 + 4y^2 - 8$, $\nabla g = (2x, 8y) \neq 0$ sur l'ellipse. Le système $y = 2\lambda x$, $x = 8\lambda y$ donne $y = 16\lambda^2 y$; $y = 0$ est impossible (alors $x = 0$), donc $\lambda = \pm \frac{1}{4}$ et $y = \pm \frac{x}{2}$.

Avec $y = \frac{x}{2}$: $2x^2 = 8$, $x = \pm 2$: points $(2, 1)$ et $(-2, -1)$, $f = 2$. Avec $y = -\frac{x}{2}$: points $(2, -1)$, $(-2, 1)$, $f = -2$.

L'ellipse est compacte : le maximum est **2**, le minimum **-2**.

17 Boîte de volume maximal

★★★

On maximise $V = xyz$ sous $g = xy + 2xz + 2yz - 48 = 0$.

$$\nabla V = (yz, xz, xy) = \lambda(y + 2z, x + 2z, 2x + 2y).$$

Les deux premières équations donnent $z(y - x) = \lambda(y - x)$. Si $\lambda = z$, alors

$yz = z(y + 2z)$ imposerait $z = 0$: exclu. Donc $x = y$. La troisième équation donne $x^2 = 4\lambda x$, soit $\lambda = \frac{x}{4}$, puis $xz = \frac{x}{4}(x + 2z)$ donne $z = \frac{x}{2}$.

La contrainte devient $3x^2 = 48$, $x = y = 4$, $z = 2$. Le volume vaut **32** dm³ ; on admet que le maximum existe (le volume tend vers 0 au bord du domaine), donc c'est lui.

18 Hessienne et dérivée seconde le long d'une droite

★★★

Par la chaîne, $g'(t) = \sum_i \partial_i f(a + th)h_i$. En dérivant encore :

$$g''(t) = \sum_{i,j} \partial_j \partial_i f(a + th)h_i h_j, \text{ donc } g''(0) = h^T H_f(a)h.$$

$$\text{Ici } H_f = \begin{pmatrix} 6x & -2y \\ -2y & -2x \end{pmatrix}, H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}. \text{ Alors } H_f h = (10, 2) \text{ et } h^T H_f h = 10 - 4 = 6.$$

Vérification : $g(t) = (1+t)^3 - (1+t)(1-2t)^2 = 6t + 3t^2 - 3t^3$, donc $g''(0) = 6$.

19 Équation des ondes



- a. $u_t = -2v_p + 2v_q$, $u_{tt} = 4v_{pp} - 8v_{pq} + 4v_{qq}$. $u_x = v_p + v_q$, $u_{xx} = v_{pp} + 2v_{pq} + v_{qq}$ (Schwarz). Donc $u_{tt} - 4u_{xx} = -16v_{pq}$.
- b. L'équation équivaut à $v_{pq} = 0$: $\partial_p v$ ne dépend que de p , donc $v(p, q) = F(p) + G(q)$ et $u(x, t) = F(x - 2t) + G(x + 2t)$.
- c. $u_{tt} = -4 \sin x \cos 2t$ et $u_{xx} = -\sin x \cos 2t$, donc $u_{tt} = 4u_{xx}$. Et $\sin x \cos 2t = \frac{1}{2} \sin(x - 2t) + \frac{1}{2} \sin(x + 2t)$.

20 Différentiabilité en défaut



Continuité : $|f(x, y)| \leq \frac{|x|(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = |x| \rightarrow 0$.

Dérivées partielles : $f(t, 0) = t$ donc $\partial_x f(0, 0) = 1$; $f(0, t) = 0$ donc $\partial_y f(0, 0) = 0$.

Si f était différentiable, on aurait $D_v f(0, 0) = \langle (1, 0), v \rangle$ pour tout v . Pour $v = (1, 1)$: on trouverait 1. Or $f(t, t) = \frac{t}{2}$, donc $D_v f(0, 0) = \frac{1}{2} \neq 1$. Contradiction : f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

 **Zyro te conseille la suite**

 Exercices de maths

Calcul différentiel : exercices de maths
Maths Spé

 QCM de maths

Calcul différentiel : QCM de maths Maths
Spé

 Contrôles de maths

Calcul différentiel : contrôle de maths
Maths Spé

 Exercices de maths

Équations différentielles linéaires :
exercices de maths Maths Spé

 Exercices de maths

Probabilités et variables aléatoires
discrètes : exercices de maths Maths Spé

 QCM de maths

Équations différentielles linéaires : QCM
de maths Maths Spé

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage