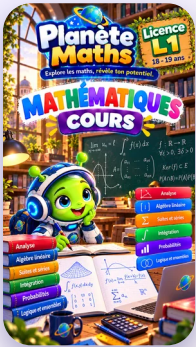


Déterminants : cours de maths Licence L1 à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 99 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

À quoi sert un nombre unique, calculé à partir d'un tableau de nombres ? Le déterminant répond à trois questions à la fois : un système linéaire a-t-il une solution unique, une matrice carrée est-elle inversible, de quel facteur une transformation dilate-t-elle les aires ou les volumes ? Ce chapitre construit le déterminant, donne ses règles de calcul, puis l'exploite pour inverser, résoudre et calculer un rang.

1. Le déterminant d'ordre 2

D Déterminant d'une matrice 2x2

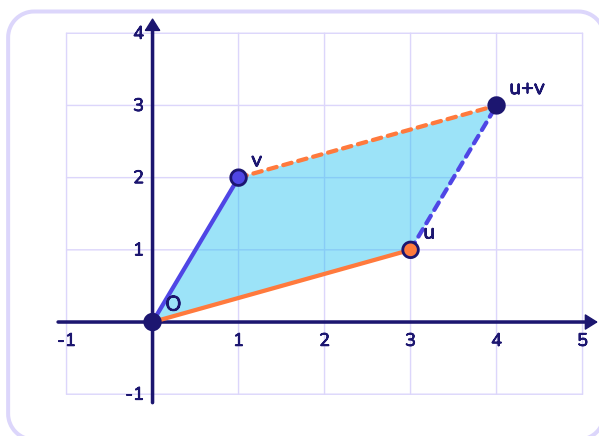
Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on pose

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

E Exemple 1

Pour $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, on obtient $\det A = 4 \times 5 - 3 \times 2 = 20 - 6 = 14$.

Le déterminant a un sens géométrique. Si $u = (3, 1)$ et $v = (1, 2)$ sont les colonnes d'une matrice, alors $\det(u, v) = 3 \times 2 - 1 \times 1 = 5$: c'est l'aire du parallélogramme construit sur u et v . Le signe indique l'orientation : il devient négatif si l'on échange les deux vecteurs.



2. Le déterminant d'ordre 3 et la règle de Sarrus

D Règle de Sarrus

$$\text{Pour } A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

$$\det A = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

On additionne les trois produits des diagonales « descendantes » (en recopiant au besoin les deux premières colonnes à droite) et l'on retranche les trois produits des diagonales « montantes ».

Cette règle est **propre à l'ordre 3** : elle ne se généralise pas à l'ordre 4.

E Exemple 2

$$\text{Soit } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}. \text{ Les produits positifs valent } 2 \times (-1) \times 5 = -10,$$

$$1 \times 4 \times 1 = 4 \text{ et } 0. \text{ Les produits négatifs valent } 0, 1 \times 3 \times 5 = 15 \text{ et}$$

$$2 \times 4 \times 2 = 16. \text{ Donc } \det B = (-10 + 4 + 0) - (0 + 15 + 16) = -6 - 31 = -37$$

.

3. Multilinéarité et caractère alterné

Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n se voit comme une fonction de ses n colonnes (ou de ses n lignes), avec des propriétés remarquables.

P**Propriétés fondamentales**

- **Multilinéarité** : le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne. Multiplier une colonne par λ multiplie le déterminant par λ ; et si une colonne est une somme, le déterminant est la somme des deux déterminants obtenus.
- **Alternance** : échanger deux colonnes change le signe du déterminant ; deux colonnes égales (ou proportionnelles) donnent un déterminant nul.
- Ajouter à une colonne un multiple d'une autre colonne ne change pas le déterminant.
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ pour une matrice d'ordre n , et $\det({}^t A) = \det A$, donc tout ce qui précède vaut aussi pour les lignes.

**Erreur classique**

Le déterminant n'est **pas** linéaire en la matrice entière : en général $\det(A + B) \neq \det A + \det B$, et $\det(2A)$ vaut $2^n \det A$, pas $2 \det A$.

4. Développement par cofacteurs**D****Mineur et cofacteur**

Pour une matrice $A = (a_{ij})$ d'ordre n , le **mineur** M_{ij} est le déterminant de la matrice d'ordre $n - 1$ obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j . Le **cofacteur** est $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

colonne 1	colonne 2	colonne 3
+	-	+
-	+	-
+	-	+

P Développement selon une ligne ou une colonne

Pour tout indice de ligne i fixé, $\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij}C_{ij}$; de même pour tout indice de colonne j fixé, $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij}C_{ij}$.

M Méthode

1. Repère la ligne ou la colonne qui contient le plus de zéros.
2. Écris chaque terme a_{ij} avec son signe du damier ci-dessus.
3. Calcule les mineurs non multipliés par zéro, puis additionne.

E**Exemple 3**

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On développe selon la colonne 2, qui contient deux

zéros : $\det M = 3 \cdot (+1) \cdot M_{22} + 1 \cdot (-1) \cdot M_{32}$. On trouve $M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8$

et $M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Donc $\det M = 3 \times 8 - 1 = 23$.

5. Matrices triangulaires et méthode du pivot**P****Matrice triangulaire**

Le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est le produit de ses coefficients diagonaux.

Comme les opérations $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ne changent pas le déterminant, on peut triangulariser une matrice avec la méthode du pivot de Gauss, en notant au passage chaque échange de lignes (un signe moins) et chaque multiplication d'une ligne par un facteur.

E**Exemple 4**

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}$. Avec $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$, on obtient les

lignes $(0, 1, 1)$ et $(0, 2, 5)$. Puis $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ donne $(0, 0, 3)$. La matrice est triangulaire, donc $\det P = 1 \times 1 \times 3 = 3$.

6. Déterminant d'un produit

P Théorème (admis)

Pour deux matrices carrées A et B de même ordre, $\det(AB) = \det A \times \det B$.

Conséquences : $\det(A^k) = (\det A)^k$, et si A est inversible, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$. Attention : $AB \neq BA$ en général, mais $\det(AB) = \det(BA)$.

E Exemple 5

Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, on a $\det A = -2$ et $\det B = -5$. Le produit vaut $AB = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 20 & -5 \end{pmatrix}$, de déterminant $-50 + 60 = 10 = (-2) \times (-5)$.

7. Caractérisation de l'inversibilité

P Théorème

Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. Dans ce cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t\text{com}(A),$$

où $\text{com}(A) = (C_{ij})$ est la comatrice, formée des cofacteurs.

Pour une matrice 2×2 , cela donne $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

E**Exemple 6**

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Son déterminant vaut

$2(6 - 0) - 1(0 - 1) + 1(0 - 3) = 12 + 1 - 3 = 10 \neq 0$: elle est inversible. Les

cofacteurs donnent $\text{com}(A) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$, donc

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

8. Formules de Cramer**P****Système de Cramer**

Si A est une matrice carrée d'ordre n avec $\det A \neq 0$, le système $AX = B$ a une unique solution, donnée par

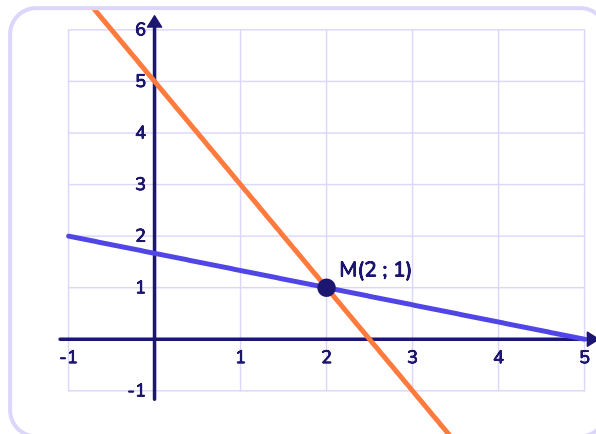
$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A},$$

où A_k est la matrice A dont la colonne k est remplacée par B .

E**Exemple 7**

Réolvons $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y + 2z = -3 \\ 3x + 2y - z = 8 \end{cases}$. On trouve $\det A = 6$, puis $\det A_1 = 6$, $\det A_2 = 12$, $\det A_3 = -6$. Donc $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$.

Géométriquement, pour deux équations à deux inconnues, la solution unique est l'intersection de deux droites non parallèles :



Astuce de Zyro

Les formules de Cramer sont belles, mais coûteuses : pour un grand système, la méthode du pivot est bien plus rapide. Garde Cramer pour les petits systèmes ou les calculs avec paramètres !

9. Rang et mineurs



Mineur d'ordre k

Un mineur d'ordre k d'une matrice A (pas forcément carrée) est le déterminant d'une sous-matrice carrée d'ordre k , obtenue en choisissant k lignes et k colonnes.



Caractérisation du rang

Le rang de A est le plus grand entier r tel qu'il existe un mineur d'ordre r non nul. Autrement dit, tous les mineurs d'ordre supérieur à r sont nuls.

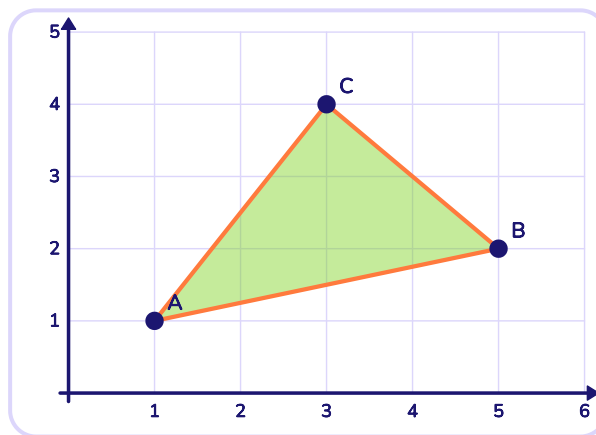
E**Exemple 8**

Soit $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 6 & 1 & 10 \end{pmatrix}$. On remarque $L_3 = L_1 + L_2$, donc tout mineur d'ordre

3 est nul. En revanche, le mineur formé des lignes 1, 2 et des colonnes 1, 3 vaut

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \text{ Le rang de } R \text{ est donc } 2.$$

Pour savoir si trois points A, B, C du plan sont alignés, on regarde le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: il est nul si et seulement si le rang de ces deux vecteurs vaut 1 ou 0. Le même déterminant, divisé par deux, donne l'aire du triangle :



À retenir

- $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$; l'ordre 3 se traite avec la règle de Sarrus ou par cofacteurs.
- Le déterminant est multilinéaire et alterné : échanger deux lignes change le signe, $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ne change rien, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
- Développement par cofacteurs : $\det A = \sum_j a_{ij}(-1)^{i+j} M_{ij}$, le damier des signes alternant à partir de +.
- $\det(AB) = \det A \det B$, $\det({}^t A) = \det A$, et le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de sa diagonale.
- A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$, et alors $A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t \text{com}(A)$.
- Cramer : $x_k = \det A_k / \det A$ quand $\det A \neq 0$.
- Le rang est l'ordre maximal d'un mineur non nul.

Le livre de cours de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 99 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

  **Zyro te conseille la suite**

 Exercices de maths

Déterminants : exercices de maths
Licence L1

 Contrôles de maths

Déterminants : contrôle de maths
Licence L1

 QCM de maths

Déterminants : QCM de maths Licence
L1

 Exercices de maths

Logique et ensembles : exercices de
maths Licence L1

 Exercices de maths

Applications et dénombrement :
exercices de maths Licence L1

 Contrôles de maths

Logique et ensembles : contrôle de
maths Licence L1

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage