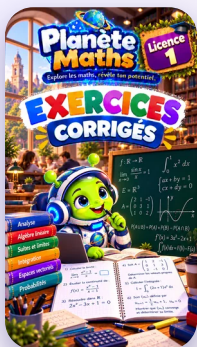


Déterminants : exercices corrigés de maths Licence L1 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 123 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Quatre déterminants d'ordre 2



On applique $ad - bc$.

a. $3 \times 4 - 5 \times 2 = 12 - 10 = 2$.

b. $(-1)(-3) - 4 \times 2 = 3 - 8 = -5$.

c. $6 \times (-3) - (-2) \times 9 = -18 + 18 = 0$. Les deux colonnes sont proportionnelles.

d. $0 \times 5 - 7 \times (-2) = 14$.

2 Règle de Sarrus



Premier déterminant : produits positifs $1 \times 1 \times 1 = 1$, $2 \times 4 \times 2 = 16$, 0 ; produits négatifs 0 , $2 \times 3 \times 1 = 6$, $1 \times 4 \times 0 = 0$. Résultat : $17 - 6 = 11$.

Second déterminant : produits positifs $2 \times 3 \times 4 = 24$, 0 , $1 \times 1 \times 1 = 1$; produits négatifs $1 \times 3 \times 0 = 0$, 0 , 0 . Résultat : 25 .

3 Vrai ou faux avec $\det A = 5$



- a. Faux : $\det(3A) = 3^3 \det A = 27 \times 5 = 135$.
- b. Vrai : une matrice et sa transposée ont le même déterminant.
- c. Faux : $\det(-A) = (-1)^3 \det A = -5$.
- d. Vrai : $\det(A^2) = (\det A)^2 = 25$.

4 Quand une matrice 2×2 est-elle inversible ?



Son déterminant vaut $m(m+1) - 6 = m^2 + m - 6 = (m+3)(m-2)$.

La matrice est non inversible si et seulement si ce déterminant est nul, c'est-à-dire pour $m = -3$ ou $m = 2$. Pour tout autre réel, elle est inversible.

5 Matrices triangulaires



Ces deux matrices sont triangulaires : leur déterminant est le produit des coefficients diagonaux.

Premier : $2 \times (-3) \times 7 = -42$. Second : $3 \times 2 \times (-1) \times 2 = -12$.

6 Aire d'un parallélogramme



On calcule $\det(u, v) = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10$.

L'aire du parallélogramme est $|10| = 10$ unités d'aire ; celle du triangle en est la moitié, soit 5 unités d'aire.

7 Effet des opérations sur les lignes



$$\det A = 4 - 6 = -2.$$

a. $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$: le signe change.

b. $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 18 = -6 = 3 \times (-2)$: le déterminant est multiplié par 3.

c. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$: inchangé.

8 Développement d'un déterminant d'ordre 4



La colonne 3 contient $(0, 4, 1, 0)$. Le terme de la ligne 2 a pour signe $(-1)^{2+3} = -1$, celui de la ligne 3 le signe $+1$.

$$\text{Mineur } M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1(0 - 3) - 2(4 - 0) + 3(6 - 0) = 7. \text{ Mineur}$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

$$\text{Donc } \det = -4 \times 7 + 1 \times 2 = -26.$$

9

Méthode du pivot



On factorise **2** dans la première ligne : le déterminant vaut $2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 10 \end{vmatrix}$.

Avec $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$: lignes $(0, 1, 2)$ et $(0, -1, 1)$. Puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ donne $(0, 0, 3)$.

Le déterminant triangulaire vaut $1 \times 1 \times 3 = 3$, donc le déterminant demandé est $2 \times 3 = 6$.

10

Déterminant d'un produit



$\det A = 6 - 1 = 5$ et $\det B = 2 - 0 = 2$.

- $\det(AB) = 5 \times 2 = 10$.
- $\det(A^3) = 5^3 = 125$.
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{5}$.
- $\det({}^tAB^{-1}) = \det A \times \frac{1}{\det B} = \frac{5}{2}$.
- $\det(2B) = 2^2 \det B = 8$, car B est d'ordre 2.

11

Déterminant avec paramètre



On développe selon la première ligne :

$$\det A(m) = m(m^2 - 1) - 1 \times (m - 0) + 0 = m^3 - 2m = m(m^2 - 2).$$

Ce déterminant s'annule pour $m = 0$, $m = \sqrt{2}$ et $m = -\sqrt{2}$: ce sont les trois valeurs pour lesquelles $A(m)$ n'est pas inversible.

12 Inverse par la comatrice



$\det B = 1(1 - 0) - 0 + 2(6 - 0) = 13 \neq 0$: B est inversible.

Cofacteurs : $C_{11} = 1$, $C_{12} = -2$, $C_{13} = 6$, $C_{21} = -(0 - 6) = 6$, $C_{22} = 1$, $C_{23} = -3$,
 $C_{31} = -2$, $C_{32} = -(0 - 4) = 4$, $C_{33} = 1$.

$$\text{Donc } B^{-1} = \frac{1}{13} {}^t\text{com}(B) = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

13 Le prix du goûter



Notons c le prix d'un croissant et j celui d'un jus : $\begin{cases} 3c + 2j = 11 \\ 5c + 4j = 19 \end{cases}$

$\det = 3 \times 4 - 2 \times 5 = 2 \neq 0$, donc le système est de Cramer.

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 19 & 4 \end{vmatrix}}{2} = \frac{44 - 38}{2} = 3 \text{ et } j = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 5 & 19 \end{vmatrix}}{2} = \frac{57 - 55}{2} = 1.$$

Un croissant coûte 3 € et un jus 1 €.

14 Rang d'une matrice 3x3



La deuxième ligne vaut deux fois la première : le déterminant d'ordre 3 est nul, donc le rang est inférieur ou égal à 2.

Le mineur formé des lignes 1 et 3, colonnes 1 et 2 vaut $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Le rang est donc 2.

15 Trois points sont-ils alignés ?



Les points sont alignés si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$. Ici $\overrightarrow{AB} = (3, 6)$ et $\overrightarrow{AC} = (m - 1, 12)$.

$$\begin{vmatrix} 3 & m-1 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 36 - 6(m-1) = 42 - 6m, \text{ nul si et seulement si } m = 7.$$

16 Matrice antisymétrique d'ordre 3



On a $\det({}^t A) = \det A$ et $\det(-A) = (-1)^3 \det A = -\det A$. Comme ${}^t A = -A$, on obtient $\det A = -\det A$, donc $\det A = 0$: la matrice n'est pas inversible.

Vérification : en développant selon la première ligne, $\det = 0 \cdot C_{11} + 2 C_{12} + (-3) C_{13}$ avec $C_{12} = -(-2 \times 0 - 5 \times 3) = 15$ et $C_{13} = (-2)(-5) - 0 \times 3 = 10$. Donc $\det = 2 \times 15 - 3 \times 10 = 0$.

17 Déterminant de Vandermonde



On fait $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$: les lignes deviennent $(0, b - a, b^2 - a^2)$ et $(0, c - a, c^2 - a^2)$. On développe selon la première colonne, puis on factorise $(b - a)$ et $(c - a)$: $(b - a)(c - a) \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b)$.

La matrice est inversible si et seulement si a, b, c sont deux à deux distincts. Pour $(1, 2, 4)$: $1 \times 3 \times 2 = 6$.

18 Déterminant circulant

★★★★

Avec la formule $aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$ appliquée à la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$:

les produits positifs sont $a \cdot a \cdot a = a^3$, $b \cdot b \cdot b = b^3$ et $c \cdot c \cdot c = c^3$. Les produits négatifs sont $c \cdot a \cdot b$, $b \cdot c \cdot a$ et $a \cdot b \cdot c$: chacun vaut abc .

D'où $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$. Pour $(1, 2, 3)$: $1 + 8 + 27 - 18 = 18$.

19 Équations matricielles et déterminant

★★★★

a. $(\det A)^2 = \det I_3 = 1$, donc $\det A = 1$ ou $\det A = -1$.

b. $(\det A)^3 = \det(8I_3) = 8^3 = 512$, et la fonction cube est injective sur $\mathbb{R}$, donc $\det A = 8$.

c. Si A était inversible, on multiplierait $A^2 = A$ par A^{-1} et l'on obtiendrait $A = I_3$, ce qui est exclu. Donc A n'est pas inversible : $\det A = 0$.

20 Système 3x3 par Cramer

★★★★

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1(2 + 3) - 1(1 - 6) + 1(-1 - 4) = 5 + 5 - 5 = 5.$$

$\det A_1 = 5$, $\det A_2 = 10$, $\det A_3 = 15$. Donc $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Vérification : $1 + 2 + 3 = 6$, $1 + 4 + 9 = 14$, $2 - 2 + 3 = 3$.

21 Rang selon un paramètre



La troisième ligne est $3L_1$, donc tous les mineurs d'ordre 3 sont nuls et le rang est au plus 2.

Considérons le mineur des lignes 1 et 2, colonnes 1 et 3 : $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m - 6$.

Si $m \neq 6$, ce mineur est non nul et le rang vaut 2. Si $m = 6$, toutes les lignes sont proportionnelles à $(1, 2, 3)$ et le rang vaut 1.

22 Aire d'une parcelle



On découpe selon la diagonale $[AC]$. Triangle ABC :

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 30 - 7 = 23, \text{ aire } \frac{23}{2} = 11,5.$$

$$\text{Triangle } ACD : \det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 28, \text{ aire } 14.$$

Aire totale : 25,5 unités d'aire, soit $25,5 \times 100 = 2\,550 \text{ m}^2$.

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 123 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

 Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Déterminants : exercices de maths
Licence L1

 QCM de maths

Déterminants : QCM de maths Licence
L1

 Contrôles de maths

Déterminants : contrôle de maths
Licence L1

 Exercices de maths

Logique et ensembles : exercices de
maths Licence L1

 Exercices de maths

Applications et dénombrement :
exercices de maths Licence L1

 QCM de maths

Logique et ensembles : QCM de maths
Licence L1

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage