

Dérivation et convexité : cours de maths Terminale à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Terminale

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Un ballon qui monte puis redescend, un coût de fabrication qui baisse puis remonte, une courbe qui se creuse ou qui s'arrondit : la dérivée raconte comment une fonction varie, et la dérivée seconde raconte comment elle se courbe. Dans ce chapitre, tu vas dériver des fonctions composées, étudier leurs variations, repérer leur **convexité** et leurs **points d'inflexion**, puis mettre tout cela au service de l'**optimisation** : trouver le plus grand ou le plus petit.

1. Dérivées usuelles et opérations

Voici les dérivées à connaître par cœur, avec leurs ensembles de validité.

$f(x)$	$f'(x)$	Valable pour
x^n (n entier, $n \geq 1$)	$n x^{n-1}$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$x \neq 0$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$

P Opérations

Pour u et v dérivables et k réel : $(u + v)' = u' + v'$; $(ku)' = k u'$;

$(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ là où $v \neq 0$.

2. Dérivée d'une composée

P Dérivée de $f \circ u$

Si u est dérivable sur un intervalle I et si f est dérivable sur un intervalle contenant les valeurs de u , alors la fonction $x \mapsto f(u(x))$ est dérivable sur I et :

$$(f(u(x)))' = u'(x) \times f'(u(x))$$

On en déduit les formules à utiliser tous les jours :

Fonction	Dérivée	Condition
u^n	$n u' u^{n-1}$	n entier
e^u	$u' e^u$	
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$	$u > 0$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$
$\cos(ax + b)$	$-a \sin(ax + b)$	
$\sin(ax + b)$	$a \cos(ax + b)$	



Exemple 1 : une puissance

$f(x) = (3x^2 - 5x + 1)^4$. Ici $u(x) = 3x^2 - 5x + 1$ et $u'(x) = 6x - 5$. Donc
 $f'(x) = 4(6x - 5)(3x^2 - 5x + 1)^3$.



Exemple 2 : une exponentielle

$g(x) = e^{-2x^2+x}$. Ici $u'(x) = -4x + 1$, donc $g'(x) = (-4x + 1)e^{-2x^2+x}$.



Exemple 3 : un logarithme

$h(x) = \ln(x^2 + 4)$. Comme $x^2 + 4 > 0$ pour tout réel x , h est définie sur $\mathbb{R}$ et
 $h'(x) = \frac{2x}{x^2 + 4}$.



Piège

On oublie très souvent le facteur u' . La dérivée de e^{3x} n'est pas e^{3x} , c'est $3e^{3x}$.

3. Étudier les variations d'une fonction

P Signe de la dérivée et variations

Soit f dérivable sur un intervalle I . Si $f' \geq 0$ sur I , f est croissante sur I . Si $f' \leq 0$ sur I , f est décroissante sur I . Si $f' = 0$ sur I , f est constante. Si f' s'annule en a en changeant de signe, f admet un extremum local en a .

M Méthode

1. Détermine l'ensemble de définition et calcule $f'(x)$.
2. Factorise $f'(x)$ pour étudier son signe : un facteur comme e^u est toujours strictement positif.
3. Dresse le tableau de signes puis le tableau de variations, avec les valeurs aux bornes et aux extremums.

E Exemple 4 : variations

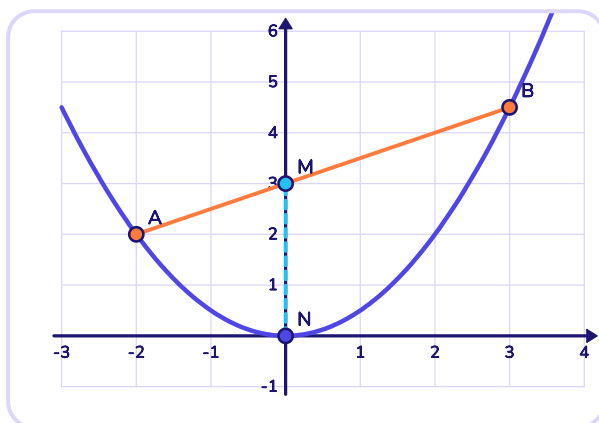
Soit $f(x) = (2x - 1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$. Alors
 $f'(x) = 2e^{-x} - (2x - 1)e^{-x} = (3 - 2x)e^{-x}$. Comme $e^{-x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $3 - 2x$, positif pour $x < \frac{3}{2}$.

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de f	$\nearrow$	maximum $2e^{-3/2} \approx 0,45$	$\searrow$

4. Dérivée seconde et convexité

D Fonction convexe, fonction concave

Une fonction dérivable sur un intervalle I est **convexe** sur I si sa courbe est située **au-dessous** de chacune de ses cordes (segments reliant deux de ses points). Elle est **concave** si sa courbe est située **au-dessus** de chacune de ses cordes.



Sur la figure, la courbe de $x \mapsto \frac{x^2}{2}$ passe sous la corde $[AB]$: le point $N(0; 0)$ de la courbe est en dessous du point $M(0; 3)$ de la corde. La fonction est convexe : la courbe a la forme d'une « cuvette ».

P Caractérisations

Pour f deux fois dérivable sur I , les propositions suivantes sont équivalentes : f est convexe sur I ; f' est croissante sur I ; $f''(x) \geq 0$ pour tout x de I . De même, f est concave si et seulement si f' est décroissante, c'est-à-dire $f'' \leq 0$.

E Exemple 5 : convexité

$g(x) = e^{-2x} + 3x$. Alors $g'(x) = -2e^{-2x} + 3$ et $g''(x) = 4e^{-2x} > 0$. La fonction g est convexe sur $\mathbb{R}$. À l'inverse, $\ln$ est concave sur $]0; +\infty[$ car $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$.

I 5. Point d'inflexion

D Point d'inflexion

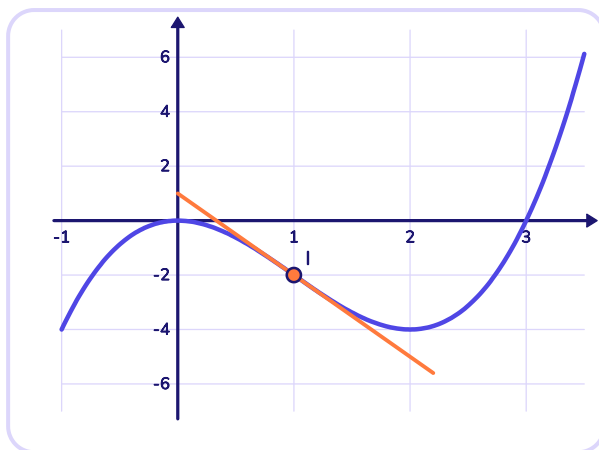
Un point d'inflexion est un point de la courbe où celle-ci **traverse sa tangente** ; c'est là que la convexité change : la courbe passe de convexe à concave, ou l'inverse.

P Critère

La courbe de f admet un point d'inflexion d'abscisse a si et seulement si f'' s'annule en a en changeant de signe.

E Exemple 6 : inflexion

$f(x) = x^3 - 3x^2$. Alors $f'(x) = 3x^2 - 6x$ et $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$. La dérivée seconde est négative pour $x < 1$ et positive pour $x > 1$: f est concave sur $] -\infty; 1]$, convexe sur $[1; +\infty[$, et le point $I(1; -2)$ est un point d'inflexion. La tangente en I a pour équation
 $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = -3(x - 1) - 2 = -3x + 1$.



Piège

$f''(a) = 0$ ne suffit pas. Pour $f(x) = x^4$, on a $f''(0) = 0$ mais $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ partout : il n'y a pas de changement de signe, donc pas d'inflexion.

6. Tangente et position relative

Position de la courbe par rapport à ses tangentes

Si f est convexe sur I , sa courbe est **au-dessus** de chacune de ses tangentes : pour tous a et x de I , $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$. Si f est concave, l'inégalité est inversée et la courbe est **au-dessous** de ses tangentes.

Exemple 7 : une inégalité célèbre

La fonction exponentielle vérifie $f'' = e^x > 0$: elle est convexe sur $\mathbb{R}$. Sa tangente en $a = 0$ a pour équation $y = f'(0)x + f(0) = x + 1$. Donc, pour tout réel x , $e^x \geq x + 1$. Par exemple, $e^{0,1} \geq 1,1$.



Astuce de Zyro

Pour retenir : une cuvette (convexe) est posée au-dessus de ses tangentes, comme un bol sur des baguettes, et une colline (concave) est sous elles.

7. Applications à l'optimisation



Méthode

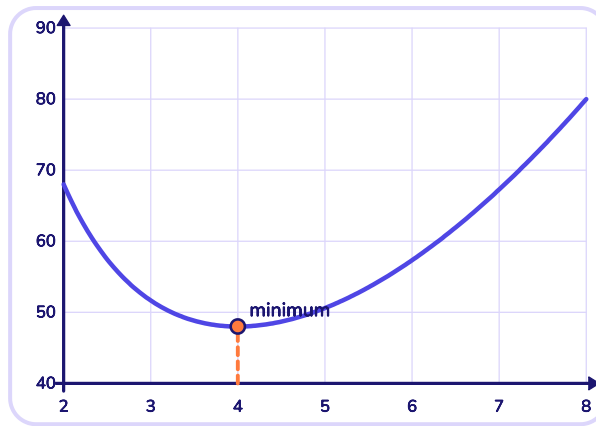
1. Choisis la variable x et son intervalle de variation.
2. Exprime la grandeur à optimiser sous forme d'une fonction $f(x)$.
3. Dérive, étudie le signe de f' , dresse le tableau de variations.
4. Conclut par une phrase avec la valeur de x , l'extremum et l'unité.



Exemple 8 : la boîte économique

On veut une boîte sans couvercle, à base carrée de côté x dm, de volume 32 dm^3 . La hauteur est $h = \frac{32}{x^2}$ et la surface de carton est $S(x) = x^2 + 4xh = x^2 + \frac{128}{x}$ pour $x > 0$.

On dérive : $S'(x) = 2x - \frac{128}{x^2} = \frac{2x^3 - 128}{x^2}$, qui s'annule pour $x^3 = 64$, soit $x = 4$. S' est négative avant 4 et positive après : S admet un minimum en $x = 4$, égal à $S(4) = 16 + 32 = 48$. La boîte la plus économique a un côté de 4 dm, une hauteur de 2 dm et utilise 48 dm² de carton.



À retenir

- Dérivée d'une composée : $(f(u))' = u' \times f'(u)$; ne jamais oublier le facteur u' .
- $f' \geq 0$ donne f croissante, $f' \leq 0$ donne f décroissante ; un extremum apparaît quand f' change de signe.
- f est convexe si et seulement si f' est croissante, soit $f'' \geq 0$; concave si $f'' \leq 0$.
- Un point d'inflexion correspond à une dérivée seconde qui s'annule **en changeant de signe**.
- Convexe : courbe au-dessus de ses tangentes ; concave : courbe au-dessous.
- Optimisation : modéliser, dériver, tableau de variations, conclure avec l'unité.

Le livre de cours de maths Terminale

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)



Entraîne-toi : défi express de Terminale

[Changer de niveau](#)

Niveau : **Terminale**

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi



Zyro te conseille la suite



Exercices de maths

Dérivation et convexité : exercices de maths Terminale



Contrôles de maths

Dérivation et convexité : contrôle de maths Terminale



QCM de maths



Exercices de maths

Dérivation et convexité : QCM de maths
Terminale

Fonction exponentielle : exercices de
maths Terminale

 Exercices de maths

Fonction logarithme népérien : exercices
de maths Terminale

 Contrôles de maths

Fonction exponentielle : contrôle de
maths Terminale

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage